El libro **Tratamiento didáctico a las funciones elementales en la enseñanza de las matemáticas** se encuentra estructurado en dos capítulos. En el primero, se analizan los conceptos, definiciones y operaciones de las funciones elementales. Posteriormente, se examinan las funciones: lineal, cuadrática, modular, de proporcionalidad inversa, cúbica, raíz cuadrada, raíz cúbica, exponencial, logarítmica, trigonométricas, y concluye, con ejercicios del capítulo. El segundo capítulo se dedica a la aplicación de las funciones.

Katherinne

Esther

Mariana

Juan

Blanca

Silvia

Lissette

Tratamiento didáctico a las funciones elementales en la enseñanza de las matemáticas

9 780311 000609

ETECAM

Tratamiento didáctico a las funciones elementales en la enseñanza de las matemáticas

Katherinne Lisset Reyes Contreras
Esther Jessenia Mera Medina
Mariana de Jesús Cervantes Barrios.
Juan Marcos Aguayo Litardo
Blanca Carmita Arias García
Silvia Lorena Macías León
Lissette Stefania Herrera Silva

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Tratamiento didáctico a las funciones elementales en la enseñanza de las matemáticas

Diseño: Ing. Erik Marino Santos Pérez.

Traducción: Prof. Dr. C. Ernan Santiesteban Naranjo.

Corrección de estilo: Prof. Dra. C. Leydis Iglesias Triana.

Diagramación: Prof. Dr. C. Ernan Santiesteban Naranjo.

Director de Colección Ciencias naturales & matemáticas: Prof. Dr. Carlos Manuel Caraballo Carmona.

Jefe de edición: Prof. Dra. C. Kenia María Velázquez Avila.

Dirección general: Prof. Dr. C. Ernan Santiesteban Naranjo.

Sobre la presente edición:

Primera edición

Esta obra ha sido evaluada por pares académicos a doble ciegos

Lectores/Pares académicos/Revisores: 0054 & 0098

Editorial Tecnocientífica Americana

Domicilio legal: calle 613sw 15th, en Amarillo, Texas. **ZIP**: 79104, EEUU

Teléfono: 7867769991

Fecha de publicación:13 marzo de 2024

Código BIC: PBF **Código EAN: 9780311000609**

Código UPC: 978031100060 **ISBN: 978-0-3110-0060-9**

La Editorial Tecnocientífica Americana se encuentra indizada en, referenciada en o tiene convenios con, entre otras, las siguientes bases de datos:

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Contenido

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Acerca de los autores

Katherinne Lisset Reyes Contreras. Docente de la Unidad Educativa San Juan. Ingeniera comercial, Universidad Técnica de Babahoyo. Maestra en Administración de la Educación, Universidad Cesar Vallejo de Perú. Magíster en Educación, Tecnología e Innovación, Universidad Pacífico. Email: katherinne.reyes@educacion.gob.ec https://orcid.org/0000-0002-7615-2188

Esther Jessenia Mera Medina. Docente de la Unidad Educativa San Juan. Ingeniera en Administración Financiera, Universidad Técnica Estatal de Quevedo. Máster en Gestión Educativa, Universidad Panamericana de Nicaragua. Email: esther.mera@educacion.gob.ec https://orcid.org/0009-0008-6596-1175

Mariana de Jesús Cervantes Barrios. Docente de la Unidad Educativa San Juan. Tecnóloga pedagógica en informática, Universidad de Guayaquil. Licenciada en Ciencias de la Educación mención Informática, Universidad de Guayaquil. Máster en Educación, especialidad en Educación Superior, Universidad Internacional Iberoamericana. Diplomado de Actualización y Perfeccionamiento Docente Forjando Futuro, Universidad de Guayaquil. Email: mariana.cervantes@educacion.gob.ec https://orcid.org/0009-0001-1555-3156

Juan Marcos Aguayo Litardo. Docente de la Unidad Educativa San Juan. Ingeniero mecánico, Universidad Técnica Estatal de Quevedo. Maestro en Administración de la Educación, Universidad Cesar Vallejo de Perú. Email: marcosj.aguayo@educacion.gob.ec https://orcid.org/0000-0001-9138-6540

Blanca Carmita Arias García. Docente de la Unidad Educativa San Juan. Ingeniera comercial en Ciencias Administrativas, Universidad Estatal de Bolívar. Magíster en Ciencias de la Educación, mención Pedagogía, Universidad Tecnológica Empresarial de Guayaquil. Email: blancac.arias@educacion.gob.ec https://orcid.org/0009-0007-2344-6514

Silvia Lorena Macías León. Docente de la Unidad Educativa San Juan. Ingeniera en Contabilidad y Auditoría, Universidad Técnica de Babahoyo. Magíster en Educación, mención en Pedagogía, Universidad Tecnológica Empresarial de Guayaquil. Email: silvial.macias@educacion.gob.ec https://orcid.org/0009-0003-3557-1591

Lissette Stefania Herrera Silva. Docente de la Unidad Educativa San Juan. Licenciada en Ciencias de la Educación, mención Educación Básica, Universidad Técnica de Babahoyo. Email: lissette.herrera@educacion.gob.ec https://orcid.org/0009-0008-4686-5663

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

About the authors

Katherinne Lisset Reyes Contreras. Teacher at the San Juan Educational San Juan Educational Unit. Commercial Engineer, Universidad Técnica de Babahoyo. Master's Degree in Education Administration, Universidad Cesar Vallejo de Perú. Master's Degree in Education, Technology and Innovation, Universidad Pacifico. Email: katherinne.reyes@educacion.gob.ec https://orcid.org/0000-0002-7615-2188

Esther Jessenia Mera Medina. Teacher at the San Juan Educational San Juan Educational Unit. Engineer in Financial Administration, Quevedo State Technical Technical University of Quevedo. Master in Educational Management, Universidad Panamericana de Nicaragua. Nicaragua. Email: esther.mera@educacion.gob.ec https://orcid.org/0009-0008-6596-1175

Mariana de Jesús Cervantes Barrios. Teacher of the San Juan Educational Unit. Pedagogical technologist in computer science, Universidad de Guayaquil. Guayaquil. Bachelor of Science in Education, mention in Computer Science, University of Guayaquil. Master in Education, specializing in Higher Education, Universidad Higher Education, Universidad Internacional Iberoamericana. Diploma of Updating and and Teacher Improvement Diploma, University of Guayaquil. Email: mariana.cervantes@educacion.gob.ec https://orcid.org/0009-0001-1555-3156

Juan Marcos Aguayo Litardo. Teacher at the San Juan Educational San Juan Educational Unit. Mechanical Engineer, Universidad Técnica Estatal de Quevedo. Master in Education Administration, Universidad Cesar Vallejo de Perú. Email: marcosj.aguayo@educacion.gob.ec https://orcid.org/0000-0001-9138-6540

Blanca Carmita Arias García. Teacher of the San Juan Educational Unit. Commercial Engineer in Administrative Sciences, Universidad Estatal de Bolívar. Master in Educational Sciences, mention in Pedagogy, Universidad Tecnológica Empresarial de Guayaquil. Email: blancac.arias@educacion.gob.ec https://orcid.org/0009-0007-2344-6514

Silvia Lorena Macías León. Teacher at the San Juan Educational Unit. Accounting and Auditing Engineer, Universidad Técnica de Babahoyo. Master in Education, mention in Pedagogy, Universidad Tecnológica Empresarial de Guayaquil. Email: silvial.macias@educacion.gob.ec https://orcid.org/0009-0003-3557-1591

Lissette Stefania Herrera Silva. Teacher at the San Juan Educational Unit. Bachelor of Science in Education, mention in Basic Education, Universidad Técnica de Babahoyo. Email: lissette.herrera@educacion.gob.ec https://orcid.org/0009-0008-4686-5663

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Resumen

El libro **Tratamiento didáctico a las funciones elementales en la enseñanza de las matemáticas** se encuentra estructurado en dos capítulos. En el primero, se analizan los conceptos, definiciones y operaciones de las funciones elementales. Posteriormente, se examinan las funciones: lineal, cuadrática, modular, de proporcionalidad inversa, cúbica, raíz cuadrada, raíz cúbica, exponencial, logarítmica, trigonométricas, y concluye, con ejercicios del capítulo. El segundo capítulo se dedica a la aplicación de las funciones.

Palabras clave: matemática, funciones lineales, cuadrática, modular, de proporcionalidad inversa, cúbica, raíz cuadrada, raíz cúbica, exponencial, logarítmica, trigonométricas, ejercicios

Abstract

The book Tratamiento didáctico a las funciones elementales en la enseñanza de las matemáticas is structured in two chapters. In the first one, the concepts, definitions and operations of elementary functions are analyzed. Subsequently, the following functions are examined: linear, quadratic, modular, inverse proportionality, cubic, square root, cube root, cube root, exponential, logarithmic, trigonometric, and concludes with exercises from the chapter. The second chapter is devoted to the application of functions.

Keywords: mathematics, linear, quadratic, modular, inverse proportionality, cubic, square root, cube root, exponential, logarithmic, trigonometric, trigonometric functions, exercises

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Introducción

El concepto de: función, está implícito en la Matemática desde las primeras civilizaciones, con el estudio de las tablillas de barro babilónicas de la colección de Plimpton, que datan del año 1900 a.n.e. A finales del siglo XVI e inicios del XVII, las ecuaciones eran una herramienta indispensable en el desarrollo de la Matemática. Con la introducción, en 1637, de los primeros sistemas de coordenadas, por el matemático francés René Descartes (1596-1650), fue posible expresar el conjunto solución de las ecuaciones mediante puntos, rectas y curvas, contribuyendo así al nacimiento del concepto de función, sin embargo, esta palabra no surge como tal hasta que el matemático alemán W.G. Leibniz (1646-1652) la utiliza en 1694 para designar una relación de dependencia entre dos magnitudes.

Este concepto es el resultado de una larga evolución histórica, hasta que su uso más generalizado ha sido el definido en 1829, por el matemático alemán Peter Dirichlet. Él estableció que, si dos variables "**x**" y "**y**" están relacionadas de manera que a cada valor de "**x**" le corresponde exactamente un valor de "**y**", entonces se dice que "**y**" es una función de "**x**".

Gracias al lenguaje simbólico de la matemática hoy en día no solo se puede establecer de manera unívoca el significado de las proposiciones matemáticas, sino que también se facilita escribirlas de forma más compacta y clara, lo cual favorece su comprensión y fijación, y permite el desarrollo de cálculos y algoritmos, que si bien son posibles en teoría mediante el lenguaje natural, se podrían realizar difícilmente en la práctica.

De esta manera podemos establecer relaciones en diferentes formatos y podemos interpretar, representar o generalizar situaciones de la realidad o de la propia Matemática, mediante reglas verbales, tablas, gráficos o ecuaciones que describen funciones.

En la ciencia, en la asignatura y en la vida práctica, es de gran importancia el conocimiento de las funciones matemáticas, generalmente las investigaciones buscan dependencias y relaciones lo cual hace evidente la posibilidad que encierra este contenido para ilustrar el vínculo de la Matemática con la realidad objetiva y así comprender su importancia, como medio para transformar la realidad. En la escuela, este tema constituye base para el estudio de otras unidades temáticas que proporcionan una sólida formación de los estudiantes. Mediante su estudio, se contribuye con el desarrollo del pensamiento funcional como una forma específica del pensamiento matemático, para lograrlo se debe partir de considerar relaciones y dependencias entre conjuntos, magnitudes, variables, etcétera, tratando de delimitar cómo unas determinan otras, es decir, descubriendo relaciones entre objetos, teniendo en cuenta una ley de formación. (S. Ballester, 2000).

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

En los actuales programas del bachillerato, se prevé el abordaje de las funciones, a partir de textos que presentan insuficiencias tanto en el tratamiento a los contenidos como a la calidad y cantidad de ejercicios para el desarrollo de habilidades; lo que repercute considerablemente en la actuación de los profesores y estudiantes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Estas apreciaciones fueron identificadas por el colectivo de autores. Con tales motivaciones se realizó un diagnóstico profundo de las causas y se implementó la propuesta, consistente en el tratamiento de cada una de las funciones elementales, lo que se aprecia en este trabajo; mediante cuadros resúmenes y ejercicios para la práctica y la sistematización, distribuidos en categorías, con el objetivo de lograr el desarrollo de habilidades, aplicación al formato diverso y a la práctica cotidiana. Hay que tener presente que el estudio se convierte en una necesidad vital y, al mismo tiempo placer; cuando el joven desarrolla, en el proceso de obtención del conocimiento, la iniciativa y la actividad cognoscitiva independiente.

Este material, realizado con mucho amor, puede ser de gran ayuda para los estudiantes de diferentes niveles y tipos de enseñanzas que aborden el tema de las funciones como objeto de estudio dentro de la asignatura Matemática, sirve además como material de consulta para docentes, padres u otros profesionales que tengan la necesidad de utilizar las funciones como solución de problemas profesionales o personales.

Capítulo I. Las funciones elementales

1.1- Conceptos, definiciones y operaciones de las funciones elementales

- **Definiciones:**
    - Una **función f,** es una correspondencia donde a cada elemento de un conjunto de partida se le hace corresponder un único elemento del conjunto de llegada.

<u>*Ejemplos:*</u>

Determina cuáles de las siguientes correspondencias definen una función.

a) La correspondencia donde a cada hijo se le hace corresponder su padre.

Si analizas esta correspondencia te percatarás, que sí representa una función, ya que a cada hijo le corresponde un único padre, es decir ningún hijo tiene más de un padre, por lo que llevado a la definición, a cada elemento del dominio le corresponde una única imagen.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

b) La correspondencia definida de $N \rightarrow N$, donde a cada número natural x se le hace corresponder su mitad.

En este caso, la correspondencia planteada no define una función, observa por qué; analizando la condición dada debes de preguntarte: ¿La mitad de todo número natural representa un número natural? Pues claro que no, esta condición solo la cumplen los números naturales pares, la mitad de los números naturales impares no representan números naturales, sino números fraccionarios.

c) La correspondencia definida de $\Re \rightarrow \Re$, donde a cada número real x, se le hace corresponder su cuadrado.

Esta correspondencia sí define una función, al preguntarte la condición: ¿El cuadrado de todo número real representa un número real? Pues claro que responderás que sí. Esta operación resulta muy fácil de desarrollar, pero además debes tener en cuenta que el cuadrado de un número real es siempre único, por lo que queda clara la definición.

d) La correspondencia definida de $Z \rightarrow Q$, donde a cada número entero x, se le hace corresponder su inverso.

Esta condición que se plantea en esta correspondencia, no representa una función, al preguntarte: ¿El inverso de todo número entero es un número racional?, pues claro que sí, excepto el de cero, pues el cero no tiene inverso, recuerda que $0^{-1} = \frac{1}{0}$, y esta operación se indefine.

- Una **función f** de X en Y (f: X $\rightarrow$ Y), es un conjunto de pares ordenados (x;y) tal que x $\in$ X, y aparece como la primera coordenada de solo un par ordenado.

<u>*Ejemplos:*</u>

Determina cuáles de los siguientes conjuntos de pares ordenados definen una función.

a) $A = \{(1;2);(2;3);(3;4);(4;5);(5;6)\}$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Este conjunto de pares ordenados sí define una función, analiza que los pares ordenados tienen como coordenadas $(x;y)$, luego los valores de la variable x en este conjunto son $\{1;2;3;4;5\}$, por lo que ninguno se repite, luego queda clara la definición planteada.

b) $B=\{(2;2);(3;3);(4;4);(4;5);(5;5)\}$

Este conjunto de pares ordenados no define una función, analiza que los valores de la variable x en este conjunto son $\{2;3;4;4;5\}$, por lo que el valor 4 aparece como primer componente de dos pares ordenados, es decir, para un mismo dominio existen dos imágenes diferentes, luego queda clara la definición planteada.

c) $A=\{(x;y)/\,y=4x;x\in\Re\}$

Este caso define un conjunto de pares ordenados $(x;y)$, tal que a cada $x\in\Re$ se le hace corresponder su cuádruplo, analiza que sí representa una función, ya que el cuádruplo de cada número real es único, ningún número tiene más de un cuádruplo.

d) $A=\{(x;y)/\,y=\sqrt{x};x\in N\}$

Este caso define un conjunto de pares ordenados $(x;y)$, tal que a cada $x\in N$ se le hace corresponder su raíz cuadrada, analiza que no representa una función, ya que cada número natural tiene dos raíces cuadradas, una positiva y otra negativa, entonces para un mismo valor del dominio corresponden dos valores diferentes de la imagen, es decir el valor x aparece como primer componente de dos pares ordenados.

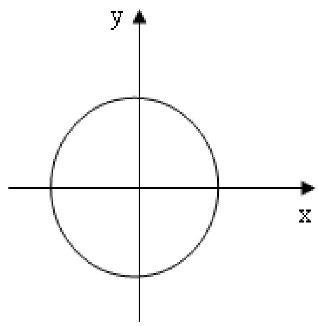
- Un gráfico es función; si cualquier recta paralela al eje de las ordenadas, corta al gráfico en un único punto.

Ejemplos:

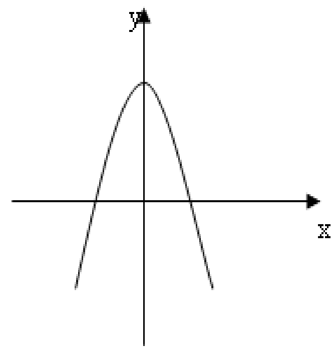
Determina cuáles de los siguientes gráficos definen una función.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

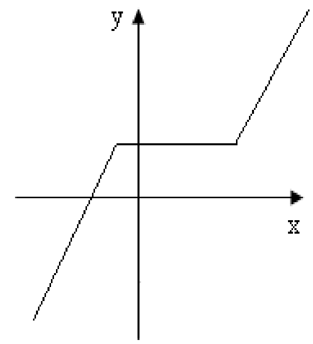
a)



b)



c)



Caso a: Si colocas tu regla paralela al eje de las ordenadas (*eje y*) y la vas desplazando por el eje de las abscisas (*eje x*) observarás que esta corta al gráfico en más de un punto, por lo que esta gráfica no representa una función, ya que para un mismo dominio existe más de una imagen.

Caso b: Al realizar el mismo procedimiento que en el caso anterior con tu regla, observarás que esta cortará el gráfico en un único punto, por lo que entonces este gráfico sí representa una función, al igual que el *caso c.*

- **Dominio** de una función: Si a cada elemento *x* de un conjunto *A*, la función f le hace corresponder un único elemento *y* de un conjunto *B*, entonces decimos que *x* es el dominio de *y*. Por lo que el dominio de la función f es el conjunto *A*, o conjunto de partida. Por tanto, si una función se define como $f : A \rightarrow B$, entonces el dominio de f es el conjunto *A*, y en el caso que no se especifique el dominio, entonces se entiende que el subconjunto de los números reales más amplio posible es donde estén definidas todas las operaciones o condiciones que exija la función.

  Gráficamente es la proyección sobre el eje de las abscisas, es decir, son todos los valores que puede tomar la variable *x*, para ello debes analizar las operaciones que intervienen en su ecuación y cuáles de ellas, se indefinen o se indeterminan en el conjunto de los números reales:

  - División por cero ($divisor \neq 0$)
  - Radicación par de números negativos ($radicando \geq 0$)

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

- Logaritmación ($base > 0; base \neq 1; \arg umento > 0$)

Ejemplos:

Determine el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $f_{(x)} = x^2 + 5x + 6$

Analizando las operaciones a las que se somete la variable x en esta ecuación: potenciación, multiplicación y adición, podrás concluir que ninguna de ellas tiene restricciones en el conjunto de los números reales, por lo que resulta que esta ecuación siempre estará definida en este conjunto, luego su dominio de definición es: $Domf = \{x \in \Re\}$.

b) $g_{(x)} = \dfrac{5}{x+2} + 9$

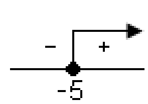
Analizando las operaciones a las que se somete la variable x en esta ecuación: división y adición, podrás concluir que la única que tiene restricciones en el conjunto de los números reales es la división, recordando la condición para la cual está definida la división ($divisor \neq 0$), resulta que $x + 2 \neq 0$, resolviendo queda que $x \neq -2$, luego su dominio de definición es: $Domg = \{x \in \Re : x \neq -2\}$.

c) $h_{(x)} = 9^{x-2} + 4$

Analizando las operaciones a las que se somete la variable x en esta ecuación: potenciación, sustracción y adición, podrás concluir que ninguna de ellas tiene restricciones en el conjunto de los números reales, por lo que resulta que esta ecuación siempre estará definida en este conjunto, luego su dominio de definición es: $Domf = \{x \in \Re\}$.

d) $q_{(x)} = \sqrt{x+5} - 2$

Analizando las operaciones a las que se somete la variable x en esta ecuación: radicación de índice par, adición y sustracción, podrás concluir que la única que tiene restricciones

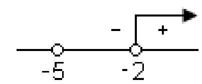


Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

en el conjunto de los números reales es la radicación de índice par, la cual debe cumplir la condición que el ($radicando \geq 0$), resulta que $x+5 \geq 0$, resolviendo esta inecuación lineal obtienes que $x \geq -5$, por lo que su representación gráfica queda su dominio de definición es: $Domq = \{x \in \Re : x \geq -5\}$.

e) $p_{(x)} = \dfrac{\log(x+2)}{x+5}$

Analizando las operaciones a las que se somete la variable x en esta ecuación: logaritmación, división y adición, podrás concluir que las únicas que tienen restricciones en el conjunto de los números reales son la logaritmación y la división. En la logaritmación, la variable solo interviene en el argumento ($\arg umento > 0$) y en la división ($divisor \neq 0$), resulta que tengo que analizar dos condiciones diferentes $x+2>0$ y $x+5 \neq 0$, resolviendo estas dos condiciones resulta que $x > -2$ y $x \neq -5$, la representación gráfica sería, luego su dominio de definición es: $Domp = \{x \in \Re : x > -2\}$ ya que el -5 queda excluido en este intervalo.



- **Imagen** de una función: Si a un elemento *x* de un conjunto *A*, la función f le hace corresponder un elemento *y* de un conjunto *B*, entonces decimos que *y* es la imagen de *x* (o también que *x* es la preimagen de *y* mediante la función f) y se escribe $f_{(x)} = y$. Al conjunto formado por todos los elementos de *B* que tengan al menos una preimagen en A, se llama imagen o codominio de la función f .

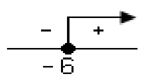
  Gráficamente, es la proyección del gráfico sobre el eje de las ordenadas, es decir todos los valores que puede tomar la variable *y*. Para determinar la imagen de una función es recomendable despejar a la variable *x*, si es posible, y analizar las operaciones a las que está sometida la variable *y*, de este modo analizamos cuáles de ellas se indefinen o indeterminan en el conjunto de los números reales.

<u>*Ejemplos:*</u>

Determine la imagen de las siguientes funciones:

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

a) $f_{(x)} = (x+5)^2 + 6$

Para analizar la imagen de una función debes despejar a la variable x, en caso de que se pueda, en este caso sí es posible, por lo que resulta que $x = \sqrt{y-6} - 5$, al analizar las operaciones a las que es sometida la variable *y* en este despejo: radicación de índice par y sustracción, podrás concluir que la única que tiene restricciones en el conjunto de los números reales es la radicación de índice par, recordando la condición para la cual está definida ($radicando \geq 0$), resulta que $y - 6 \geq 0$, resolviendo esta inecuación queda que $y \geq 6$, la representación gráfica de esta inecuación, recordando que el dominio de esta función es el 

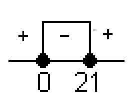
conjunto de los números reales, entonces su imagen es: $\operatorname{Im} gf = \{y \in \Re : y \geq -6\}$.

b) $h_{(x)} = \sqrt[5]{x-2} + 7$

En este caso después de despejar la variable x, resulta que $x = (y-7)^5 + 2$, al analizar las operaciones a las que es sometida la variable *y* en este despejo: potenciación, adición y sustracción, podrás concluir que ninguna tiene restricciones en el conjunto de los números reales y el dominio de esta función es el conjunto de los números reales, por lo que su imagen es: $\operatorname{Im} gh = \{y \in \Re\}$.

c) $t_{(x)} = 3x + 6; (-2 \leq x \leq 5)$

En este caso después de despejar la variable x, resulta que $x = \frac{1}{3}y - 2$, al analizar las operaciones a las que es sometida la variable *y* en este despejo: multiplicación y sustracción, podrás concluir que ninguna tiene restricciones en el conjunto de los números reales pero el dominio de esta función está restringido, entonces analizando la monotonía de esta función se puede concluir que es monótona creciente en todo su dominio. Luego para analizar su imagen debes determinar la imagen para cada valor del



Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

dominio dado $t_{(-2)} = 0$ y $t_{(5)} = 21$, y representando estos valores resulta que la imagen es: $\operatorname{Im} gh = \{y \in \Re : 0 \leq y \leq 21\}$.

Nota: en caso de que la función hubiese sido monótona decreciente, entonces el sentido de las desigualdades se hubiese invertido, recuerda que a medida que las x aumentan, las y disminuyen.

- El **cero** de una función es el valor del dominio tal que su imagen es cero, y gráficamente se puede ver cómo la abscisa corta o topa al eje de las abscisas o eje de las x. Una función puede tener uno, varios o simplemente no tener cero, se determina igualando la ecuación a cero, $f_{(x)} = 0$, y resolviendo esta ecuación.

Ejemplos:

Determina los ceros de las siguientes funciones:

a) $m_{(x)} = x^2 + 25$

$x^2 + 25 = 0$ (Igualando la ecuación a cero)

$x^2 = -25$ (Resolviendo la ecuación cuadrática)

$x = \sqrt{-25}$ (Indefinido en el conjunto de los números reales)

Por lo que la función m no tiene ceros.

b) $k_{(x)} = \log_2(x+5) - 4$

$\log_2(x+5) - 4 = 0$ (Igualando la ecuación a cero)

$\log_2(x+5) = 4$ (Resolviendo la ecuación logarítmica)

$x + 5 = 2^4$ (Aplicando definición de logaritmo)

$x = 16 - 5$

$x = 11$

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Luego, el cero de la función k es $x = 11$.

c) $w_{(x)} = \dfrac{2x+1}{x-9}$

$\dfrac{2x+1}{x-9} = 0$ (Igualando la ecuación a cero)

$\dfrac{2x+1}{x-9} = 0 / \cdot\, mcm(x-9); x \neq 9$ (Resolviendo la ecuación fraccionaria)

$2x+1=0$

$x = -\dfrac{1}{2}$

Luego, el cero de la función w es $x = -\dfrac{1}{2}$.

- El **intercepto** de una función con el eje de las ordenadas es el valor de la imagen tal que su dominio es cero. Gráficamente es la imagen del punto donde la función corta o topa al eje de las ordenadas o eje de las *y*, se determina evaluando la función para $x = 0$.

  Ejemplos:

Determina el intercepto con el eje de ordenadas de las siguientes funciones:

a) $p_{(x)} = x^3 + 8$

$p_{(0)} = 0^3 + 8 = 8$ (Evaluando la función para $x = 0$)

Luego, el intercepto con el eje de ordenadas de la función p, es $y = 8$.

b) $v_{(x)} = 5x - 7$

$v_{(0)} = 5 \cdot 0 - 7 = -7$ (Evaluando la función para $x = 0$)

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Luego, el intercepto con el eje de ordenadas de la función v, es $y=-7$.

c) $y=\frac{1}{x}-4$

$y=\frac{1}{0}-4$ (Evaluando la función para $x=0$, se obtiene que la división por cero se indefine)

Resulta entonces que la función no intercepta al eje de las ordenadas.

- En el **signo** de una función, conocido su gráfico, será positivo en los intervalos donde el gráfico de la función esté por encima del eje de las abscisas o eje de las x; y negativo cuando esté por debajo del eje.
  - Conocida su ecuación:
    - *Positiva:* cuando $f_{(x)}$ es mayor que cero $\left(f_{(x)}>0\right)$.
    - *Negativa:* cuando $f_{(x)}$ es menor que cero $\left(f_{(x)}<0\right)$.
    - *No negativa:* cuando $f_{(x)}$ es mayor o igual que cero $\left(f_{(x)}\geq 0\right)$.
    - *No positiva:* cuando $f_{(x)}$ es menor o igual que cero $\left(f_{(x)}\leq 0\right)$.

Ejemplos:

Determina el signo pedido, en las siguientes funciones:

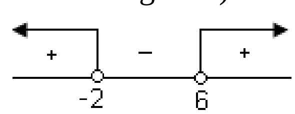
a) $c_{(x)}=|x-2|-4$; positiva.

$|x-2|-4>0$ (La función tiene que ser estrictamente mayor que cero)

$|x-2|>4$ (Analiza que el módulo de $(x-2)$, siempre será positivo)

$(x-2)=4$ $-(x-2)=4$ (Recuerda que $(x-2)$ puede ser positivo o negativo)

$x=4+2$ $-x+2=4$



$x_1=6$ $x_2=-2$

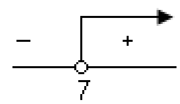
Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

$R/\{x \in \Re : -2 > x > 6\}$

b) $y = \sqrt[3]{x+1} - 2$; negativa.

$\sqrt[3]{x+1} - 2 < 0$ (La función tiene que ser estrictamente menor que cero)

$\sqrt[3]{x+1} < 2$



$\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 < 2^3$

$x+1 < 8$ $R/\{x \in \Re : x > 7\}$

$x < 7$

c) $z_{(x)} = (0{,}3)^{x^2-1} - 1$; no negativa.

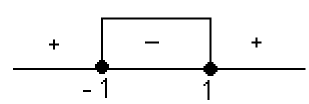
$(0{,}3)^{x^2-1} - 1 \geq 0$ (La función tiene que ser mayor o igual que cero)

$(0{,}3)^{x^2-1} \geq 1$

$(0{,}3)^{x^2-1} \geq (0{,}3)^0$ (Transformando a una base constante)

$x^2 - 1 \leq 0$ (Como $0 < base < 1$, el sentido de la desigualdad se invierte)

$(x+1)(x-1) = 0$



$x+1 = 0$ $x-1 = 0$

$x_1 = -1$ $x_2 = 1$ $R/\{x \in \Re : -1 \leq x \leq 1\}$

d) $y = \dfrac{1}{x+4} - 2$; no positiva.

$\dfrac{1}{x+4} - 2 \leq 0$ (La función tiene que ser menor o igual que cero)

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

$\dfrac{1-2(x+4)}{x+4} \leq 0$ (Ampliando a un mismo denominador)

$\dfrac{1-2x-8}{x+4} \leq 0$

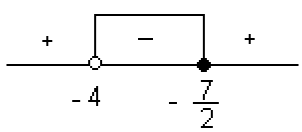
$\dfrac{-2x-7}{x+4} \leq 0 / \cdot (-1)$ (La variable de mayor grado del numerador es negativa)

$\dfrac{2x+7}{x+4} \geq 0$ (Se multiplicó solo el numerador, luego se invierte la desigualdad)

Ceros del numerador (*Anulan*) Ceros del denominador (*Indefinen*)

$2x+7=0 \quad x+4=0$

$x=-\dfrac{7}{2}$ $\qquad x=-4$



$R/\left\{x \in \Re : -4 \leq x \leq -\dfrac{7}{2}\right\}$

- **Función inyectiva:** Si para dos valores iguales de la imagen le corresponden valores iguales del dominio.
  - Si es monótona creciente o monótona decreciente, estrictamente, en todo su dominio.
  - Conocido el gráfico, cualquier recta paralela al eje de las abscisas (eje x), esta intercepta un único valor *y*.

<u>*Ejemplos:*</u>

Analiza cuáles de las siguientes funciones son inyectivas:

a) $y=-2x-9$

- Analiza las operaciones contrarias a las que es sometida la variable x: división y adición; ellas cumplen la condición de ser única, luego la función es inyectiva.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

- Analiza que la siguiente función es monótona decreciente en todo su dominio, luego la función es inyectiva.
- Si realizas el esbozo gráfico observarás que toda recta paralela al eje de abscisas corta al gráfico en un único punto, luego la función es inyectiva.

b) $y = x^2 - 5x + 6$

- Analizando la monotonía de esta función observarás que crece y decrece por intervalos, por lo que no es inyectiva.
- Analiza las operaciones contrarias a las que es sometida la variable x: radicación de índice par, adición y sustracción; de ellas la que cumple la condición de no ser única es la radicación de índice par, recuerda que la raíz par de un número positivo es positiva y negativa, luego la función no es inyectiva.
- Si realizas el esbozo gráfico observarás que existen rectas paralelas al eje de las abscisas que cortan el gráfico en más de un punto, luego la función no es inyectiva.

c) $y = \log(x + 5)$

- Analiza las operaciones contrarias a las que es sometida la variable x: potenciación y adición; todas cumplen la condición de ser única, luego la función es inyectiva.
- Analiza que la siguiente función es monótona creciente en todo su dominio, luego la función es inyectiva.
- Si realizas el esbozo gráfico observarás que toda recta paralela al eje de las abscisas corta al gráfico en un único punto, luego la función es inyectiva.

- **Función sobreyectiva:** Si a cada elemento del conjunto imagen, le corresponde al menos un elemento del conjunto dominio, la imagen es plena.

  Ejemplos:

  Analiza cuáles de las siguientes funciones son sobreyectivas:

  a) $y = (x + 2)^3 + 1$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

- Analiza que esta función tiene imagen plena, luego la función es sobreyectiva.

b) $y = \sqrt{x+3}$

- Analiza que esta función no tiene imagen plena, luego la función no es sobreyectiva.

c) $y = (x-3)^2 - 4; \{y \in \Re : y \geq -4\}$

- Analiza que esta función no tiene imagen plena, pero piden para $\{y \in \Re : y \geq -4\}$, luego en este intervalo la función sí tiene imagen plena, por lo que es sobreyectiva.

- **Función biyectiva:** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Ejemplos:

Analiza cuáles de las siguientes funciones son biyectivas:

a) $y = 2^{x-1} - 2$

- Analiza por cualquiera de las vías analizadas anteriormente, que esta función es inyectiva. Pero al analizar observarás que no tiene imagen plena, por lo que no es sobreyectiva, ni biyectiva.

b) $y = x^2 - 1; \{y \in \Re : y \geq -1\}$

- Analiza por cualquiera de las vías analizadas anteriormente, que esta función no es inyectiva. Al analizar observarás que no tiene imagen plena, se pide en su conjunto imagen, por lo que sí es sobreyectiva, por tanto al no cumplir la doble condición, no es biyectiva.

c) $y = \sqrt[3]{x-4} + 2$

- Analiza por cualquiera de las vías analizadas anteriormente, que esta función es inyectiva. Al analizar observarás que tiene imagen plena, por lo que es sobreyectiva, por tanto la función es biyectiva.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

- **Monotonía:** Si el dominio de definición de una función $y=f_{(x)}$ contiene al intervalo $(a;\ b)$ y x_1 y x_2, son números cualesquiera, pertenecientes a $(a;\ b)$, tales que $x_1<x_2$, entonces:

  - La función $y=f_{(x)}$ ***crece estrictamente*** en $(a;\ b)$, si $f_{(x1)} < f_{(x2)}$.
  - La función $y=f_{(x)}$ ***decrece estrictamente*** en $(a;\ b)$, si $f_{(x1)} > f_{(x2)}$.

  A las funciones que crecen o decrecen estrictamente en $(a;\ b)$, se les llama ***monótonas*** en este intervalo.

  El ***análisis de la monotonía*** de una función $y=f_{(x)}$, consiste precisamente, en determinar los intervalos en los que se descompone su dominio; de manera que en cada uno de ellos $y=f_{(x)}$, crece o decrece estrictamente.

  La porción de la gráfica de una función que corresponde a un intervalo en el que ella es estrictamente creciente es ***ascendente,*** mirado de izquierda a derecha; por el contrario, una porción de gráfica que ***desciende*** al mirarla de izquierda a derecha, corresponde a una función que es estrictamente decreciente en el intervalo en cuestión.

- **Paridad de funciones:**
  - **Par:** una función es par, si su gráfico es axialmente simétrico, es decir, respecto al eje de ordenadas (eje y) y se cumple que: $f_{(x)} = f_{(-x)}$

    Teorema: Si una función f es inyectiva, entonces f no es una función par.

  - **Impar:** una función es impar, si su gráfico es centralmente simétrico, es decir, respecto al origen de coordenadas o respecto al par ordenado (0;0) y se cumple que: $-f_{(x)} = f_{(-x)}$
  - Si el dominio no es simétrico con respecto a $x = 0$, la función no es par ni impar.

  <u>*Ejemplos:*</u>

  Clasifica las siguientes funciones según su paridad:

  a) $f_{(x)} = x^2 - 5$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

- Analiza el esbozo gráfico de la función y observarás que es axialmente simétrico, únicamente (simétrico respecto al eje de las ordenadas), por lo que la función es par.
- Analiza que para que sea par, debe de cumplirse que: $f_{(x)} = f_{(-x)}$

$f_{(x)} = x^2 - 5 \quad f_{-(x)} = (-x)^2 - 5 = x^2 + 5$

Luego se cumple la condición que, $f_{(x)} = f_{(-x)}$, por lo que la función es par.

- Analiza que para que sea impar debe cumplirse que: $f_{(x)} = -f_{(-x)}$

$f_{(x)} = x^2 - 5 \quad - f_{-(x)} = -\left[(-x)^2 - 5\right] = -\left[x^2 + 5\right] = -x^2 - 5$

Luego $f_{(x)} \neq -f_{(-x)}$, por lo que la función no es impar.

b) $g_{(x)} = x^3$

- Analiza el esbozo gráfico de la función y observarás que es centralmente simétrico únicamente (simétrico respecto al origen de coordenadas), por lo que la función es impar.
- Analiza que para que sea impar debe de cumplirse que: $g_{(x)} = -g_{(-x)}$

$g_{(x)} = x^3 \quad -g_{(-x)} = -(-x)^3 = x^3$

Luego se cumple la condición que $g_{(x)} = -g_{(-x)}$, por lo que la función es impar.

- Analiza que si es par, debe de cumplirse que: $g_{(x)} = g_{(-x)}$

$g_{(x)} = x^3 \quad g_{(-x)} = (-x)^3 = -x^3$

Luego se cumple la condición que, $g_{(x)} \neq g_{(-x)}$, por lo que la función no es par.

c) $h_{(x)} = 6x - 7$

- Analiza el esbozo gráfico de la función y observarás que no es centralmente simétrico (simétrico respecto al origen de coordenadas), ni axialmente simétrico

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
Web of Sciece/Core Collection
Book Citation Index
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

(simétrico respecto al eje de ordenadas), por lo que la función no es par ni impar.

- Analiza que para que sea impar debe cumplirse que: $h_{(x)}=-h_{(-x)}$

$h_{(x)}=6x-7 \;\; -h_{(-x)}=-[6(-x)-7]=6x+7$

Luego no se cumple la condición que, $h_{(x)}\neq -h_{(-x)}$, por lo que la función no es impar.

- Analiza si es par, debe cumplirse que: $h_{(x)}=h_{(-x)}$

$h_{(x)}=6x-7 \;\; h_{(-x)}=6(-x)-7=-6x-7$

Luego se cumple la condición que, $h_{(x)}\neq h_{(-x)}$, por lo que la función no es par.

- **Eje de simetría:** es la recta perpendicular al eje de las abscisas que divide al gráfico de una función en dos partes iguales, si conocemos dos puntos del gráfico (x_1, p) y (x_2, p), el eje de simetría pasará por el punto medio entre estos, o sea la recta $x=\frac{x_1+x_2}{2}$.

  Nota: una función tiene eje de simetría cuando aplicándole una simetría axial al gráfico de su función correspondiente, a través del eje de las ordenadas o una paralela a esta, el gráfico de la función se transforma en sí misma. Una función tiene eje de simetría, cuando una de sus ecuaciones es par, excepto la función lineal, que la única que tiene eje de simetría es la de ecuación $y=n$.

  <u>*Ejemplos:*</u>

  Determina, en caso de exista, el eje de simetría de las siguientes funciones:

  a) $y=x^2$

  - Si analizas esta función es par, por lo que sí tiene eje de simetría, y se calcula sustituyendo por dos elementos del dominio, cuya imagen sea la misma, en este

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

caso para imagen 9, los dominios son opuestos ± 3, luego $x = \frac{-3+3}{2} = \frac{0}{2} = 0$ y el eje de simetría es la recta $x = 0$.

b) $y = (x+2)^3 - 4$

- Si analizas esta función observarás que ninguna de sus ecuaciones es par, por lo que no tiene eje de simetría.

c) $y = 2$

- Si analizas esta función es par, por lo que sí tiene eje de simetría, calculando resulta que cualquier electo del dominio tiene la misma imagen, pero como es una recta paralela al eje de las abscisas entonces su eje de simetría es la recta $x = 0$.

d) $y = |x+5| - 4$

- Si analizas esta función no es par, pero la ecuación $y|x|$, que es su ecuación canónica sí es par, por lo que sí tiene eje de simetría, para el cual se calcula sustituyendo por dos elementos del dominio, cuya imagen sea la misma, en este caso se puede determinar $x_1 = -d + n$ y $x_1 = -d - n$, con $n \in \Re : n \neq -d$, luego $x = \frac{(-5+2)+(-5-2)}{2} = \frac{-3-7}{2} = \frac{-10}{2} = -5$ y el eje de simetría es la recta $x = -5$.

e) $y = \frac{5}{x-7} + 9$

- Si analizas esta función observarás que ninguna de sus ecuaciones es par, por lo que no tiene eje de simetría.

Nota: Las únicas funciones elementales que tienen eje de simetría son la lineal en la forma $y = n$, la cuadrática, la modular y el coseno. El eje de simetría de una función lineal cuando es de la forma $y = n$, es la recta $x = 0$ y en las demás es la recta que tiene como ecuación $x = -d$

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

- **Punto de Inflexión:** es el punto donde está definido el sentido de la concavidad de una función, es decir, es el punto donde la función pasa de cóncava a convexa o viceversa.
- Las únicas funciones elementales que tienen punto de inflexión son la cúbica y su inversa y las trigonométricas.
- El **valor máximo** de una función es el mayor valor que puede alcanzar un elemento de su imagen.
- *Nota: Una función solo puede tener valor máximo cuando su imagen está restringida.*

- El **valor mínimo** de una función es el menor valor que puede alcanzar un elemento de su imagen.
- *Nota: Una función solo puede tener valor mínimo cundo su imagen está restringida.*

- **Asíntotas** de una función, son los valores inadmisibles de la misma.
- **Vertical:** valor inadmisible del dominio.
- **Horizontal:** valor inadmisible de la imagen.

Ejemplos:

Determine, en caso que exista, las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $y = 2x + 9$

Analiza que esta función tiene dominio e imagen plena, por tanto no tiene asíntotas.

b) $y = \log(x-4) + 2$

Analiza que esta función tiene imagen plena, no así su dominio, recuerda que el dominio de esta función es $\{x \in \Re : x > 4\}$, por tanto tiene una asíntota vertical, que es la recta de ecuación $x = 4$.

c) $y = 3^{x-1} + 2$

Analiza que esta función tiene dominio pleno, no así su imagen, recuerda que la imagen de esta función es $\{y \in \Re : y > 2\}$, por tanto tiene una asíntota horizontal, que es la recta de ecuación $y = 2$.

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

d) $y=\dfrac{1}{x-8}+5$

Analiza que esta función tiene dominio e imagen con restricciones, recuerda que el dominio de esta función es $\{x\in\Re : x\neq 8\}$, la imagen de esta función es $\{y\in\Re : y\neq 5\}$, por tanto tiene una asíntota vertical que es la recta de ecuación $x=8$ y una horizontal que es la recta de ecuación $y=5$.

e) $y=(x+1)^2-7$

Analiza que esta función tiene dominio pleno, no así su imagen, recuerda que la imagen de esta función es $\{y\in\Re : y\geq -7\}$, en este caso esta función tampoco tiene asíntotas, ya que solo su imagen se restringe a las mayores o iguales que su vértice, solo tienen asíntotas cuando la condición es estrictamente mayor o menor y distinta.

- Una función real f , es **periódica,** si existe un número real *T*, tal que para todo elemento, *x*, del dominio de la función se cumple que $f_{(x)} = f_{(x+T)}$. El número *T* recibe el nombre de período de la función.

➢ *Teorema:* Si la función f es inyectiva, entonces no puede ser periódica.

➢ *Teorema:* Si la función f es estrictamente monótona, entonces no puede ser periódica.

- **Esbozo gráfico:**

Para realizar el esbozo gráfico de una función cualquiera te proponemos seguir el procedimiento siguiente:

1. Trazar un sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas.
2. Calcular los ceros, si existen.
3. Calcular el intercepto con el eje de ordenadas, si existe.
4. Calcular las coordenadas del vértice o de su punto característico, en caso de que exista alguno de ellos.
5. Determinar asíntotas, si existen.
6. Calcular las coordenadas de algunos puntos (convenientemente).

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

7. Representar los puntos obtenidos en el sistema de coordenadas.
8. Esbozar el gráfico.

- **Función inversa:** si f es una función inyectiva con dominio A, e imagen B, entonces la función f^{-1} con domino B, e imagen A; se llama función inversa de f y se define por:

$f^{-1}{}_{(y)} = x$, si $f_{(x)} = y$ para toda $y \in B$

- El gráfico de la función (f) y el gráfico de su inversa (f^{-1}) son simétricos respecto a la recta $y = x$
- Algoritmo para determinar la inversa de una función

1. Determinar si la función es inyectiva.
2. Despejar a la variable x.
3. Intercambiar variables.

- **Operaciones con funciones:** Sean dos funciones f y g, entonces la relación que a cada número real $x \in Domf \cap Domg$ le corresponde el número real:
- $f_{(x)} + g_{(x)}$, es una función que se llama **función suma,** se denota por $f + g$ y se define como $(f + g)_{(x)} = f_{(x)} + g_{(x)}$, para toda $x \in Domf \cap Domg$.
- $f_{(x)} - g_{(x)}$, es una función que se llama **función diferencia,** se denota por $f - g$ y se define como $(f - g)_{(x)} = f_{(x)} - g_{(x)}$, para toda $x \in Domf \cap Domg$.

➢ *Nota: En lo adelante consideramos la suma algebraica de funciones, es decir, que la diferencia se considera como una extensión de la suma.*

- $f_{(x)} \cdot g_{(x)}$, es una función que se llama **función producto,** se denota por $f \cdot g$ y se define como $(f \cdot g)_{(x)} = f_{(x)} \cdot g_{(x)}$, para toda $x \in Domf \cap Domg$.
- $f_{(x)} \div g_{(x)}$, es una función que se llama **función cociente,** se denota por $f \div g$ y se define como $(f \div g)_{(x)} = f_{(x)} \div g_{(x)}$ para toda $x \in Domf \cap Domg : g_{(x)} \neq 0$.

Ejemplos:

Book Citation Index
Web of Sciece/Core Collection
ETECAM Editorial Tecnocientífica Americana
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Sean las funciones $f_{(x)} = x + 2$ y $g_{(x)} = x^3$. Calcula:

a) $f_{(x)} + g_{(x)}$

$f_{(x)} + g_{(x)} = (x+2) + (x^3) = x^3 + x + 2$

b) $f_{(x)} - g_{(x)}$

$f_{(x)} - g_{(x)} = (x+2) - (x^3) = x + 2 - x^3 = -x^3 + x + 2$

c) $f_{(x)} \cdot g_{(x)}$

$f_{(x)} \cdot g_{(x)} = (x+2)(x^3) = x^4 + 2x^3$

d) $f_{(x)} \div g_{(x)}$

$$\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} = \frac{(x+2)}{(x^3)} = \frac{x+2}{x^3}$$

- **Función compuesta:** Sean dos funciones f y g, entonces la relación que a cada número real $x \in Domg : \operatorname{Im} g \cap Domf$ le corresponde el número real $f_{(g(x))}$, se llama **función compuesta**, se denota por fog y se define como $(fog)_{(x)} = f_{(g(x))}$

Esta forma de combinar dos funciones es, sin lugar a dudas, la operación más importante que puede realizarse con ellas.

Para que exista la función compuesta, las funciones f y g deben cumplir que, como en la función $(fog)_{(x)}$, f le halla las imágenes a las imágenes de g, entonces es preciso que estas últimas estén dentro del dominio de f, por lo tanto, para que exista la función fog es necesario y suficiente que la imagen de g esté incluida en el dominio de f. En las funciones en que esto no ocurra es posible definir la función fog, restringiendo el dominio de g a aquellos valores que sus imágenes pertenezcan al dominio de f, así es dominio de la función compuesta fog, el conjunto de todas las $x \in Domg : \operatorname{Im} g \cap Domf$.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Nota: El hecho de que fog exista, no significa que necesariamente gof también exista, por lo que la composición de funciones no es conmutativa.

Ejemplo:

Sean las funciones $f_{(x)} = x^2$, $g_{(x)} = \sqrt{x-1}$ y $h_{(x)} = x^5$.

a) Calcula, en caso de que exista foh y hof.

- Primeramente, debes analizar el dominio y la imagen de ambas funciones:

$Domf = \{x \in \Re\}$ e $\operatorname{Im} gf = \{y \in \Re : y \geq 0\}$

$Domh = \{x \in \Re\}$ e $\operatorname{Im} gh = \{y \in \Re\}$

- Analiza, que para que foh exista entonces debe cumplirse que la imagen de h esté incluida en el dominio de f, en este caso se cumple, luego $foh_{(x)} = \left(x^5\right)^2 = x^{10}$.
- Analiza, que para que hof exista entonces debe de cumplirse que la imagen de f esté incluida en el dominio de h, en este caso se cumple, luego $hof_{(x)} = \left(x^2\right)^5 = x^{10}$.

b) Calcula, en caso de que exista fog y hog.

- Determinando dominio e imagen de ambas funciones:

$Domf = \{x \in \Re\}$ e $\operatorname{Im} gf = \{y \in \Re : y \geq 0\}$

$Domg = \{x \in \Re : x \geq 1\}$ e $\operatorname{Im} g = \{y \in \Re : y \geq 0\}$

- Recuerda que para que fog exista, entonces debe cumplirse que la imagen de g esté incluida en el dominio de f, en este caso se cumple, luego $fog_{(x)} = \left(\sqrt{x-1}\right)^2 = x-1$.
- Recuerda que para que gof exista, entonces debe cumplirse que la imagen de f esté incluida en el dominio de g, en este caso no se cumple, luego hof no existe.

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

1.2.- La Función Lineal

- **Definición**

Es la correspondencia donde a cada $x \in \Re$ se le hace corresponder el número real $f_{(x)} = mx + n$. Donde m y n, son números reales dados.

- **Ejemplos**

1. $y = 2x + 3 \rightarrow (m = 2; n = 3)$

2. $y = -5x + 7 \rightarrow (m = -5; n = 7)$

3. $y = 5 \rightarrow (m = 0; n = 5)$

4. $y = 3{,}6x \rightarrow (m = 3{,}6; n = 0)$

5. $f_{(x)} = -0{,}2x - \frac{1}{2} \rightarrow (m = -0{,}2; n = -\frac{1}{2})$

- **Esbozo gráfico**

El esbozo gráfico de la función es una recta no paralela al eje de las ordenadas, en un sistema de ejes perpendiculares. La inclinación de la recta está dada por la pendiente o por la tangente del ángulo que forma la recta con el semieje "x" positivo y se denota por **(m)** y el punto de corte de la recta con el eje ***y*** es la ordenada en el origen, y la llamamos **n**. Para realizar el esbozo gráfico de esta función, basta con determinar dos puntos de ellas, porque recordemos que, cuando por dos puntos del plano pasa una y solo una recta, entonces dos puntos pudieran ser, el cero de la función y su intercepto con el eje de ordenadas **(n).**

- **Ecuación de la recta**

➢ *¿Cómo se obtiene la ecuación de una recta, si se conocen la pendiente y un punto de la misma o la tangente del ángulo que forma la recta con el semieje "x" positivo y un punto? La tangente del ángulo que forma la recta con el semieje "x" positivo es la pendiente de la recta.*

Ejemplo:

Escribe la ecuación de la función lineal, cuyo gráfico es la recta que tiene como pendiente m=2 y pasa por el punto A (1; 3).

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
Book Citation Index
Web of Sciece/Core Collection
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Para hallar la ecuación de la recta basta con realizar uno de los siguientes procedimientos:

- *Sustituir los valores de la pendiente y el punto en la fórmula del cálculo de la pendiente:*

$$m = \frac{y - y_p}{x - x_p}$$

$$2 = \frac{y-3}{x-1}$$

$$2(x-1) = y - 3$$

$$2x - 2 + 3 = y$$

$$2x + 1 = y$$

Ecuación de la recta $y = 2x + 1$

- *Sustituir en la fórmula de la recta y calcular el valor de **n***

$$y = mx + n$$

$$y_p = mx_p + n$$

$$3 = 2 \cdot 1 + n$$

$$3 - 2 = n$$

$$1 = n$$

Ecuación de la recta sustituyendo en la ecuación de la recta los valores de m y n

$$y = mx + n$$

$$y = 2x + 1$$

- *¿Cómo se obtiene la ecuación de una función lineal, si se conocen 2 de sus puntos?*

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la función lineal, cuyo gráfico es la recta que pasa por los puntos P (2,1) y Q (3,4).

Para hallar la ecuación de esta función lineal se puede determinar utilizando una de las siguientes vías:

- *Determinar la pendiente de la recta que pasa por los puntos y utilizar una de las vías anteriores conociendo la pendiente y un punto.*

$$m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{1-4}{2-3} = \frac{-3}{-1} = 3$$

Utilizando una de las dos vías:

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Vía uno:

$$m = \frac{y - y_p}{x - x_p}$$

$$3 = \frac{y - 1}{x - 2}$$

$$3(x - 2) = y - 1$$

$$3x - 6 + 1 = y$$

$$3x - 5 = y$$

Ecuación de la recta

$$y = 3x - 5$$

Vía dos:

$$y = mx + n$$

$$y_p = mx_p + n$$

$$1 = 3 \cdot 2 + n$$

$$1 - 6 = n$$

$$-5 = n$$

Ecuación de la recta sustituyendo en la ecuación de la recta los valores de m y n

$$y = mx + n$$

$$y = 3x - 5$$

En ambos casos se obtiene la misma ecuación, es decir, los procedimientos están bien realizados.

- *Encontrar los valores de "m" y de "n" en f(x)=mx+n. Esto se realiza sustituyendo por los puntos que se tienen, en esta ecuación. Es lo mismo escribir* $y = mx + n$

Para el punto (2;1), cuando la x es 2, la y vale 1. Entonces $1 = 2m + n$

Para el punto (3;4), cuando la x es 3, la y vale 4. Entonces $4 = 3m + n$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
Web of Sciece/Core Collection
Book Citation Index
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Obteniendo así un sistema de ecuaciones, el cual se debe resolver. Primero se escribe más ordenado:

$$\begin{cases} 2m + n = 1 \\ 3m + n = 4 \end{cases} \Bigg| \cdot (-1)$$

Sustituyendo el valor de m en una de las dos ecuaciones

$$2 \cdot 3 + n = 1$$

$$\begin{cases} -2m - n = -1 \\ 3m + n = 4 \end{cases} \quad 6 + n = 1$$

$$m = 3 \quad n = -5$$

Con los valores de **m** y **n** sustituyendo en la ecuación de la recta tenemos que:

$$y = mx + n$$

$$y = 3x - 5$$

- **Algunos elementos a tener en cuenta para analizar la función lineal:**
  - Si $n = 0$ y $m = 1$, recta que es bisectriz del III y I cuadrantes.
  - Si $n = 0$ y $m = -1$, recta que es bisectriz del II y IV cuadrantes.
  - Si $m > 0$, la función es monótona creciente.
  - Si $m < 0$, la función es monótona decreciente.
  - Si $m = 0$, la función es constante, recta paralela al eje de las abscisas.
  - Toda función lineal que pase por el origen de coordenadas, es impar.
  - La inversa de la función $y = x$, es la propia función.
  - La recta paralela al eje de las ordenadas no es función, esta tiene la forma $x = a; a \in \Re$.
  - La función de ecuación $y = 0$ cumple la condición de ser par e impar a la vez.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Ejemplo resuelto

Sea la función lineal h definida por la ecuación $h_{(x)} = 2x + 3$.

a) Realice su esbozo gráfico.

b) Determine:

- Dominio
- Imagen
- Ceros
- Monotonía
- Paridad
- Valor Máximo
- Valor Mínimo
- Eje de simetría
- Intercepto con eje de ordenadas
- Signo

c) Clasifíquela en inyectiva, sobreyectiva o biyectiva

Respuesta

a) Para la realización del esbozo gráfico de esta función, recordando que es una recta, basta con determinar dos puntos que pertenezcan a ella, es decir los interceptos con los ejes coordenados.

Intercepto con el eje de las abscisas (cero)

$2x + 3 = 0$ Punto a representar: $\left(-\dfrac{3}{2};0\right)$

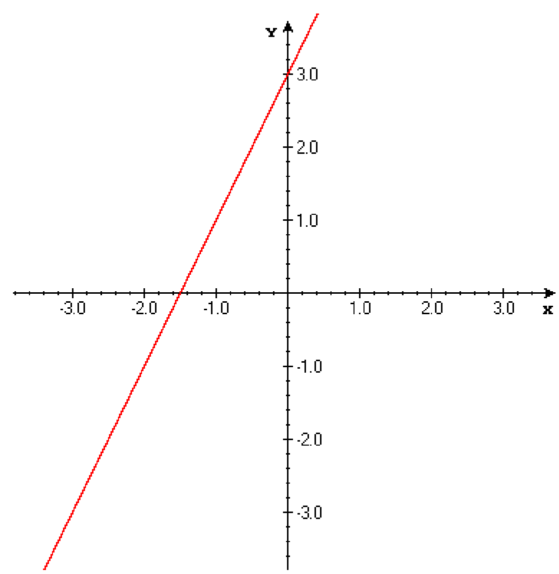
$2x = -3$

$x = -\dfrac{3}{2}$

Intercepto con el eje de las ordenadas

$h_{(0)} = 2 \cdot 0 + 3$ Punto a representar: $(0;3)$

$h_{(0)} = 3$



b) Propiedades

- Dominio

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Analiza que esta función no está restringida en su dominio, las operaciones a las que es sometida la variable x: multiplicación y suma, no tienen restricciones en el conjunto de los números reales, luego se puede afirmar que el dominio de esta función es: $x \in \Re$.

- Imagen

Analiza que esta función no está restringida en su dominio, entonces despejando la variable ***y***, y analizando las operaciones a las que es sometida, observarás que son división por 2 y resta, las cuales no tienen restricciones en el conjunto de los números reales, luego se puede afirmar que la imagen de esta función es: $y \in \Re$.

- Ceros

Como observarás, ya determinamos el cero de esta función para realizar su esbozo gráfico, que es $x_0 = -\frac{3}{2}$

- Monotonía

Recuerda que para determinar la monotonía de una función lineal basta con comparar el valor de la pendiente con cero, en este caso la pendiente es $m = 2$, luego comparándola con cero, puedes concluir que es mayor que cero, por lo que la función es monótona creciente en todo su dominio.

- Paridad

Recordarás que para determinar la paridad de una función debes analizar uno de los tres casos:

- Analiza el esbozo gráfico de la función y observarás que no es centralmente simétrico (simétrico respecto al origen de coordenadas), ni axialmente simétrico (simétrico respecto al eje de ordenadas), por lo que la función no es par ni impar.
- Analiza que para que sea impar debe cumplirse que: $h_{(x)} = -h_{(-x)}$

  $h_{(x)} = 2x + 3 \quad -h_{(-x)} = -[2(-x) + 3] = 2x - 3$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Luego no se cumple la condición que $h_{(x)} \neq -h_{(-x)}$, por lo que la función no es impar.

- Analiza que para que sea par, debe cumplirse que: $h_{(x)} = h_{(-x)}$

$h_{(x)} = 2x + 3 \quad h_{(-x)} = 2(-x) + 3 = -2x + 3$

Luego se cumple la condición que, $h_{(x)} \neq h_{(-x)}$, por lo que la función no es par.

Puedes concluir que la función no es par ni impar.

- Valor máximo

Esta función tiene imagen plena, luego no tiene valor máximo.

- Valor mínimo

Esta función tiene imagen plena, luego no tiene valor mínimo.

- Eje de simetría

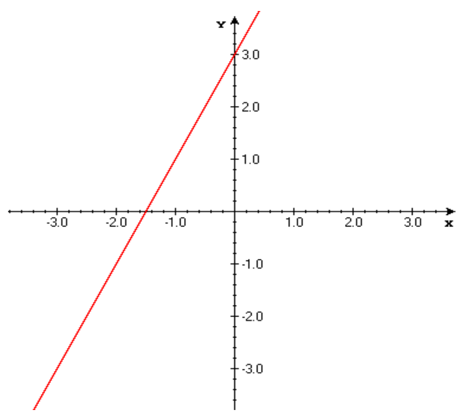
Esta función no tiene eje de simetría, recuerda que la única función lineal que tiene eje de simetría es la de ecuación $y = n$.

- Intercepto con el eje de ordenadas

Recuerda que ya determinamos este valor para realizar su esbozo gráfico, que es $y_0 = 3$.

- Signo

Para analizar el sigo, debemos realizar el esbozo gráfico, que ya lo realizamos en el inciso a), luego observamos que para los valores del dominio que están a la izquierda del cero de la función, las imágenes son negativas, y para los valores mayores, entonces las imágenes son positivas, luego podemos afirmar que la función es:



Positiva: $\left\{x \in \Re : x < -\frac{3}{2}\right\}$, también se puede expresar

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

$x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$

Negativa: $\left\{x \in \Re : x > -\frac{3}{2}\right\}$, también se puede expresar $x \in \left(-\frac{3}{2}; \infty\right)$

c) Analiza cada una de las clasificaciones.

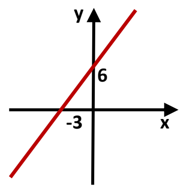
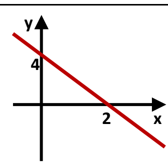
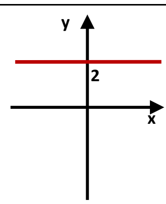
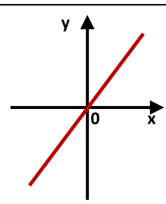
- Esta función es estrictamente monótona creciente en todo su dominio, luego es inyectiva.

- Analiza que el conjunto imagen es $y \in \Re$, es decir tiene imagen plena, luego la función es sobreyectiva.

Se puede concluir entonces que la función h es una función biyectiva.

A continuación, se ofrece un cuadro resumen con las distintas maneras en que puede aparecer expresada una función lineal, su esbozo gráfico y algunas de sus propiedades principales.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Ecuac.	Ejemplo	Esbozo gráfico	Dom	Imag	Ceros	Monot.	Parid.	I. Ord	Signo
y =mx + n	y = 2x + 6		$x \in \Re$	$y \in \Re$	x = -3	M.C	No es par ni impar	y = 6	negat. $x<-3$ posit. $x>-3$
	y = -2x + 4		$x \in \Re$	$y \in \Re$	x = 2	M.D	No es par ni impar	y = 4	posit. $x<2$ negat. $x>2$
y = n	y = 2		$x \in \Re$	$y \in \Re$	----	----	Par	y = 2	posit. $x \in \Re$
y =m x	y = x		$x \in \Re$	$y \in \Re$	x = 0	M.C	Impar	y = 0	negat. $x<0$ posit.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Ejercicios del epígrafe

1. Esboce el gráfico de la función lineal que pasa por el origen de coordenada y por el punto $M(2;4)$.

a) Escriba la ecuación de esta función.

b) ¿Está situado el punto $N(-1;-2)$, sobre la recta que describe esta función?

2. Sea la función lineal $r_{(x)} = 5x - 8$.

a) Realice su esbozo gráfico.

b) Determine:

- Dominio, imagen y monotonía
- Un intervalo donde la función sea negativa.

3. Se tiene la función, h definida en $\Re$ por la ecuación $h_{(x)} = -3x - 0,9$.

a) Realice su esbozo gráfico.

b) Determine:

- Monotonía.
- Los valores de x para los cuales h está por encima de la ordenada 16.

c) ¿Es h una función par? Justifica

d) Verifica si el punto $P(2;5,1) \in h$.

4. Si n describe una función lineal definida en $\Re$ por la ecuación $n_{(x)} = 6 + 0,2x$. Analiza y responde:

a) Se puede afirmar que n es una función que no es par ni impar. ¿Por qué?

b) ¿Es n una función monótona decreciente? Justifica.

c) Justifica con conceptos, por qué n es una función biyectiva.

5. Dada la función $y = 4x + 3$:

a) Diga el valor del intercepto con el eje y

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

b) Diga el valor de la pendiente.

c) Calcule los ceros de la función.

d) Trace el gráfico correspondiente en el intervalo $-2 < x \leq 7$.

6. Analiza la función lineal y defina en $\Re$ por la ecuación $y = x - 6$ y responde:

a) Interceptos con ejes coordenados.

b) Monotonía e imagen.

c) ¿Es esta función impar? Justifica.

7. Se tiene una función lineal h, de la cual se conoce que $h_{(0)} = -4$, y $h_{(-2)} = 0$.

a). Halla la ecuación de h.

b). Justifica por qué es monótona decreciente la función h.

c). Determina todos los valores reales para los cuales $h_{(x)}$ es positiva.

8. Clasifica las siguientes proposiciones, en verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a) ___ Toda función lineal es impar.

b) ___ El cero de la función h, definida en $\Re$ por la ecuación $h_{(x)} = 4x - 3$, es $x_0 = \frac{3}{4}$

c) ___ La función h definida en $\Re$ por la ecuación $h_{(x)} = -x + 2$, es creciente en todo su dominio.

d) ___ La imagen de la función m definida en $\Re$ por la ecuación $m_{(x)} = -8x - 2{,}4$ en el punto de abscisa $x = 2\frac{1}{4}$, es un número fraccionario.

e) ___ La recta que corta al eje x formando con su dirección positiva un ángulo agudo, es siempre estrictamente positiva, para los valores de su dominio mayores que el valor de **x** que la anula.

f) ___ La función definida por la ecuación $y = -x + \sqrt{7}$, es inyectiva.

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

g) ___ La función f definida en $\Re$ por la ecuación $f_{(x)} = 7x - 1$, es no negativa para las $\left\{ x \in \Re : x \geq \frac{1}{7} \right\}$.

h) ___ La función lineal que pasa por los puntos $K(2;7)$ y $L(4;-3)$ corta al eje de las ordenadas en $y = 4$.

i) ___ La función p definida por la ecuación $p_{(x)} = -3x + 5$ con $(x \geq 2)$ tiene como valor mínimo $y = 3$.

j) ___ Sea $g_{(x)} = 3x - 2$; entonces $\frac{g_{(x+h)} - g_{(x)}}{h} = 3$

9. Selecciona la respuesta correcta y marca con una *x* en la línea dada.

9.1- De una función lineal se sabe que pasa por el punto $Z(-2;7)$ y corta al eje de las abscisas en el punto $T(3;0)$. Entonces se puede afirmar que la función:

a) ___ Tiene cero y es monótona creciente.
b) ___ Es monótona decreciente y no corta al eje de las ordenadas.
c) ___ Es inyectiva y positiva para las $x < 3$.
d) ___ Tiene pendiente $m = -\frac{7}{5}$, y es par.

9.2- Sea la función lineal $y = -4x + 2$. La imagen de esta función para $x \in \left]-1;5\right[$ es:

a) ___ $y \in \Re : 6 < y < -18$ b) ___ $y \in \Re$ c) ___ $y \in \Re^*$ d) __ $y \in \Re : -18 < y < 6$

9.3- Sea la función lineal $y = 9x - 1$, cuyo gráfico está defino para $\{x \in \Re : 1 \leq x < 9\}$, entonces se puede firmar que la función en este intervalo:

a) ___ Es creciente y tiene ceros.
b) ___ Es inyectiva y corta al eje de las ordenadas.
c) ___ No tiene ceros y es impar.
d) ___ Es posita y biyectiva.

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

9.4- Los valores reales negativos para los cuales la función $g_{(x)} = -0{,}25x - 5$ es no positiva son:

a) ___ $x \in \Re : x \geq -20$ b) ___ $x \in \Re : x \leq -20$

c) ___ $x \in \Re : -20 \leq x < 0$ d) __ $x \in \Re : -20 \geq x > 0$

9.5- Sea $f_{(2)} = 3$ un punto que pertenece a la función lineal $f_{(x)} = mx + 6$. La ecuación de una recta paralela a la representación gráfica de f es:

a) ___ $y = -4{,}5x - 32$ b) ___ $y = \frac{4}{3}x + 8$ c) ___ $y = -\frac{4}{3}x + 14$ d) __ $y = \frac{2}{9}x + 4$

10. Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera en cada caso.

a) Toda función lineal con su pendiente positiva es monótona ________________________.

b) El cero de la función g definida en $\Re$ por la ecuación $g_{(x)} = 5x - 3{,}5$ es: ______________.

c) El conjunto imagen de la función f definida por la ecuación $f_{(x)} = 0{,}3 - 2x$ con $x \in [-0{,}4;7[$ es: _______________________.

d) Una ecuación de una función que pasa por los puntos $A(2;1)$ y $B(-2;8)$ es: ___________.

e) La imagen de la función definida por la ecuación $y = 4{,}1x + 7$ en el punto de abscisa $x = 4$ es: ________________.

f) Los valores reales de x para los cuales la función $k_{(x)} = 7x - 0{,}7$ es no negativa, son: ___.

g) Sean las funciones $p_{(x)} = 2{,}5x - 2\frac{1}{3}$ y $q_{(x)} = -6 - 5{,}3x$, entonces los valores de x para los cuales ambas funciones alcanzan el mismo valor son: ______________________________.

Book Citation Index
Web of Scіece/Core Collection
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

h) El dominio de definición de la función $t_{(x)} = -9x - 2$ para $\{y \in \Re : -1 < y \leq 7\}$ es: ________.

i) Una ecuación que defina una función lineal, impar y monótona decreciente es: ________.

j) La pendiente de una función lineal, cuyo gráfico corta al eje de las abscisas formando un ángulo de $33{,}7^0$ con el semieje x positivo es: __________________.

1.3. La Función Cuadrática

- **Definición**

La correspondencia que a cada $x \in \Re$ se le hace corresponder el número real $f_{(x)} = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$, donde a, b y c son números reales dados, se denomina función cuadrática.

- **Ejemplos**

6. $y = x^2 + 2x + 3 \rightarrow (a = 1; b = 2; c = 3)$

7. $y = -x^2 - 5x + 6 \rightarrow (a = -1; b = -5; c = 7)$

8. $y = 5x^2 \rightarrow (a = 5; b = 0; c = 0)$

9. $y = 2x^2 + 1 \rightarrow (a = 2; b = 0; c = 1)$

10. $y = 3x^2 - 5x \rightarrow (a = 3; b = -5; c = 0)$

11. $f_{(x)} = (x + 2)^2 + 1 \rightarrow (a = 1; b = 4; c = 5)$

- **Esbozo gráfico**

En general, el gráfico de una función cuadrática f (x) = a x ² + b x + c, es una parábola cuyo eje de simetría es la recta perpendicular al eje x que contiene al vértice, es el punto del gráfico que tiene el menor (mayor) valor de las imágenes. Los valores a, b y c pertenecientes a los reales y a ≠ 0.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

La existencia de los ceros de una función cuadrática depende del valor de la discriminante $D = b^2 - 4ac$ de la ecuación de segundo grado que la define, si D > 0 tiene dos ceros, si $D = 0$ tiene un solo cero, si D<0 la ecuación no tiene solución; por tanto, no tiene ceros. Para calcular los ceros de la función se utiliza la siguiente fórmula: $x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

- **¿Cómo expresar una función cuadrática del tipo $f_{(x)} = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ en la forma $y = a(x+d)^2 + e$?**

Para ello realizaremos la explicación mediante un ejemplo:

Expresa la función $y = x^2 + 2x + 3$ en la forma $y = a(x+d)^2 + e$, es necesario formar un trinomio cuadrado perfecto (TCP) con el complemento cuadrático.

Primeramente analizaremos los valores de los coeficientes de la ecuación que define la función $a = 1; b = 2; c = 3$, ahora utilizaremos el complemento cuadrático que se determina de la siguiente forma y lo llamaremos P complemento: $P = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{a}$, sustituyendo los valores de los coeficientes obtenemos que $P = 1$, ahora para expresar la ecuación en la forma pedida, realizaremos el completamiento cuadrático en la ecuación dada, queda entonces: $y = x^2 + 2x + 3 + P - P$, adicionamos y restamos para mantener el equilibrio en la ecuación, ordenando resulta la ecuación $y = \underbrace{x^2 + 2x + P}_{TCP} + 3 - P$, sustituyendo obtenemos $y = \underbrace{x^2 + 2x + 1}_{TCP} + 3 - 1$; reduciendo términos semejantes $y = \underbrace{x^2 + 2x + 1}_{TCP} + 2$ y descomponiendo en factores el TCP queda representada de la forma pedida $y = (x+1)^2 + 2$.

- **Determinación del vértice de una parábola**

Para determinar el vértice de una parábola debemos ver la forma en que está expresada la función, recordar que las coordenadas del vértice son $V(x_v; y_v)$, ejemplo:

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

- Determina las coordenadas del vértice de la función $y = x^2 + 2x + 3 \rightarrow (a = 1; b = 2; c = 3)$

Después de extraer los valores de los parámetros a, b y c, determinamos el valor de la $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$.

Ahora con el valor de la x_v determinamos el valor de la y_v evaluando la función para la x_v, queda entonces: $y_v = f_{(x_v)} = (-1)^2 + 2(-1) + 3 = 1 - 2 + 3 = -1 + 3 = 2$.

El vértice de la función es entonces $V(-1;2)$

- Determina las coordenadas del vértice de la función anterior, ahora expresada en la forma $y = a(x + d)^2 + e$.

La ecuación ya la determinamos anteriormente, que es $y = (x + 1)^2 + 2$, aquí es más sencillo determinar las coordenadas del vértice, el mismo tiene coordenadas $V(-d; e)$, los valores de los parámetros son $d = 1; e = 2$ y el vértice $V(-1;2)$.

Algunos elementos a tener en cuenta para analizar la función cuadrática:

- Si $-1 < a < 1$, la función se contrae y si $-1 > a > 1$, entonces la función se dilata (respecto al eje *x*).
- Si $a > 0$ la parábola abre hacia arriba.
- Si $a < 0$ la parábola abre hacia abajo.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Ejemplo resuelto

Sea la función cuadrática g definida por la ecuación $g_{(x)} = x^2 + 4x + 3$.

a) Realice su esbozo gráfico.

b) Determine:

- Dominio
- Imagen
- Ceros
- Monotonía
- Paridad
- Coordenadas del vértice
- Valor Máximo
- Valor Mínimo
- Eje de simetría
- Intercepto con eje de ordenadas
- Signo

c) Clasifíquela en inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

d) Exprésela en la forma $y = a(x+d)^2 + e$.

Respuesta

a) Para realizar este esbozo gráfico se tomará el vértice, los ceros (en caso de que tenga), el intercepto con el eje de ordenadas (en caso de que tenga), y algunos puntos que pertenezcan a la función.

Vértice: extraer los parámetros de a, b y c

$a = 1; b = 4; c = 3$

Recordando que el vértice tiene coordenadas $V(x_v; y_v)$

Determinando el valor de la x_v por la fórmula, se obtiene que: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2\cdot 1} = -\frac{4}{2} = -2$

Para determinar el valor de la y_v, basta con evaluar la función para el valor de la x_v, obteniéndose que: $y_v = 1(-2)^2 + 4(-2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$

Luego sustituyendo, se obtiene que el vértice tenga coordenadas: $V(-2;-1)$

Calculando el intercepto con el eje de ordenas, que se calcula evaluando la función para $x = 0$, que en esta función el intercepto es el valor del parámetro c, entonces el valor es $y = 3$.

Calculando los ceros, se determina igualando la ecuación a cero:

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

$x^2 + 4x + 3 = 0$

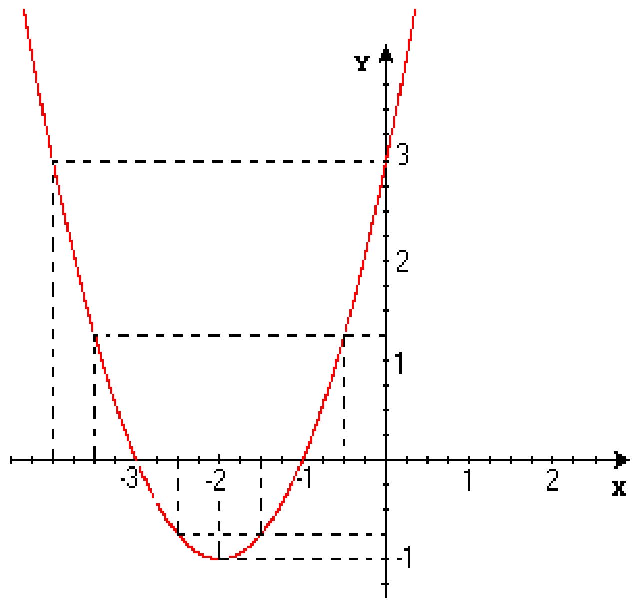
$(x+3)(x+1) = 0$

$x_1 = -3 \quad x_2 = -1$

Determinando el ploteo de puntos:

x	-4	-3,5	-2,5	-1,5	-0,5	0
y	3	1,25	-0,75	-0,75	1,25	3

Representando en el sistema de coordenadas el vértice, los ceros, el intercepto con el eje de las ordenadas y los puntos calculados en el ploteo, se obtiene el esbozo gráfico mostrado en la figura.



b) Propiedades

- Dominio

El dominio de esta función es $x \in \Re$, ya que el gráfico abarca todo el eje de las abscisas, además si analizas las operaciones que intervienen en la ecuación de la función, observarás que ninguna se indefine en el conjunto de los números reales.

- Imagen

Si observas el esbozo gráfico te percatarás que solo existe desde $y = -1$ hacia arriba, luego la imagen de esta función es $y \in \Re : y \geq -1$.

- Ceros

Ya se calcularon los ceros par el esbozo gráfico, estos son: $x_1 = -3$ y $x_2 = -1$

- Monotonía

Al analizar el esbozo gráfico de la función de izquierda a derecha te percatarás que tiene intervalos donde crece y donde decrece, es decir a la izquierda de la x_v ella decrece y a la derecha crece, luego la función es monótona decreciente para $x \leq -2$ y monótona creciente para $x \geq -2$.

- Paridad

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Recuerda que debes analizar si es par o impar:

Para que sea par debe cumplirse que $g_{(x)} = g_{(-x)}$ y al calcular no se cumple ya que: $x^2 + 4x + 3 \neq x^2 - 4x + 3$, luego la función no es par.

Para que sea impar debe cumplirse que $g_{(x)} = -g_{(-x)}$ y al calcular no se cumple ya que: $x^2 + 4x + 3 \neq -x^2 + 4x - 3$, luego la función no es impar.

A modo de conclusión, esta función no es par ni impar.

- Coordenadas del vértice

Ya determinamos las coordenadas del vértice para el esbozo gráfico que es $V(-2;-1)$

- Valor Máximo

Si te percatas en esta función su gráfico abre hacia arriba, por lo que no tiene valor máximo.

- Valor Mínimo

Al analizar la imagen de esta función observarás que es $y \in \Re : y \geq -1$, es decir, el gráfico está desde $y = -1$ hacia arriba, por lo que sí tiene valor mínimo, que es $y = -1$ en $x = -2$

- Eje de simetría

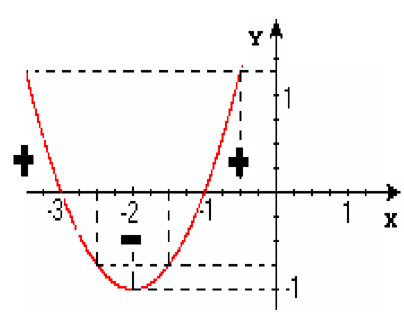
La función cuadrática tiene como eje de simetría la recta $x = x_v$, en este caso el eje de simetría es $x = -2$.

- Intercepto con eje de ordenadas

Ya se calculó el intercepto con este eje para el esbozo gráfico que es el valor del parámetro c, es $y = 3$.

- Signo

Para el signo, basta con analizar el eje de las abscisas, utilizando los ceros y ubicar los signos correspondientes, recuerda que lo que se hace es resolver una inecuación cuadrática, obteniéndose el esbozo gráfico de la figura, luego el signo de esta función es:



Positiva: $\{x \in \Re : -3 > x > -1\}$

Negativa: $\{x \in \Re : -3 < x < -1\}$

Book Citation Index
Web of Sciece/Core Collection

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

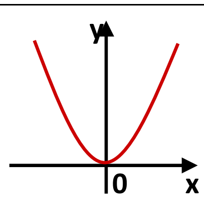
c) Esta función no es inyectiva, recuerda que para que sea inyectiva, la función debe ser estrictamente creciente o decreciente, y esta tiene intervalos de crecimiento y decrecimiento, luego puedes concluir que no es inyectiva, por lo que tampoco puede ser biyectiva. Otra forma para demostrar que no es inyectiva es la prueba de la recta paralela al eje de las abscisas, si lo verificas observarás que la corta en más de un punto.

Analiza entonces que esta función no tiene imagen plena, por lo que no puede ser sobreyectiva.

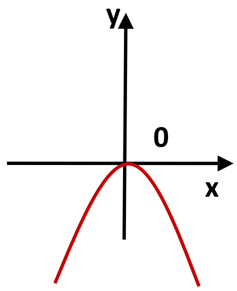
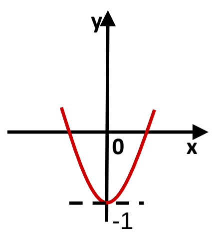
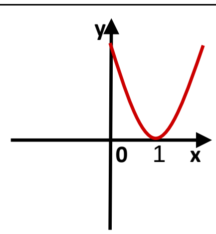
Luego la función no es biyectiva.

d) Para expresar esta función en la forma $y = a(x+d)^2 + e$, debes calcular el complemento cuadrático, utilizando la fórmula $P = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{a}$, para ello te hacen falta los parámetros a y b, que ya los conoces de la ecuación de la función que son: $a = 1$ y $b = 4$, sustituyes estos valores en la fórmula y obtendrás que el complemento cuadrático es $P = 4$, al adicionarlo y restarlo en la ecuación original y descomponer el trinomio cuadrado perfecto te queda $g_{(x)} = (x+2)^2 - 1$.

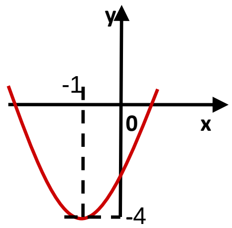
A continuación, se ofrece un cuadro resumen con las distintas maneras en que puede aparecer expresada una función cuadrática, su esbozo gráfico y algunas de sus propiedades principales.

Ecuación	Ejemplo	Esbozo gráfico	Dom	Imag	Ceros	Monot	Pari.	V. Máx	V. Mín	Signo
y = ax^2	y = x^2		$x \in \Re$	$y \in \Re: y \geq 0$	$x_1 = 0$	MD $x \leq 0$ MC $x \geq 0$	Par	----	y = 0 en x = 0	No negativa

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
Book Citation Index
Web of Sciece/Core Collection
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

	y =- x^2		$x \in \Re$	$y \in \Re$: $y \leq 0$	$x_1 = 0$	MC $x \leq 0$ MD $x \geq 0$	Par	y = 0 en x = 0	----	No positiva
y =a x^2+e	y = x^2-1		$x \in \Re$	$y \in \Re$: $y \geq -1$	$x_1 = 1$; $x_2 = -1$	MD $x \leq 0$ MC $x \geq 0$	Par	----	y = -1 en x = 0	negat. $-1 < x < 1$ posit. $-1 > x > 1$
ó y = a(x+d)^2	ó y = (x-1)^2		$x \in \Re$	$y \in \Re$: $y \geq 0$	$x_1 = 1$	MD $x \leq 1$ M.C $x \geq 1$	No es par ni impar	----	y = 0 en x = 1	posit. $x \in \Re$: $x \neq 1$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

y =a x^2+bx+c ó	y = x^2 + 2x - 3 ó		$x \in \Re$	$y \in \Re$: $y \geq -4$	$x_1 = -3$; $x_2 = 1$	MD $x \leq -1$ MC $x \geq -1$	No es par ni impar	----	y = -4 en x = -1	negat. $-3 < x < 1$ posit. $-3 > x > 1$

Ejercicios del epígrafe

1. Dada la función cuadrática, $y = x^2 + 4x$

a) Escriba las coordenadas del vértice del gráfico correspondiente.

b) Determine la imagen y el valor mínimo de la función.

c) ¿En qué intervalo la función es decreciente?

2. Dada la parábola de ecuación $y = x^2 - 2x$

a) Determine las coordenadas de los ceros.

b) Determine las coordenadas de su vértice.

c) Obtenga la ecuación de la recta que pasa por el vértice y por el cero más alejado del origen.

d) Represente en un mismo sistema de coordenadas tanto la función dada, como la recta obtenida.

3. Dada la función cuadrática cuyo gráfico es una parábola de vértice $(-3;-4)$.

a) Escriba la ecuación que corresponde a la función dada en la forma: $y = x^2 + px + q$

b) Calcule los ceros de la función.

c) Esboce el gráfico de la función.

d) Diga si el punto $P(2;21)$ pertenece a la función dada.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

4. Dada la función definida por la expresión $t_{(x)} = (x-7)^2$.

a) Diga cuáles son las coordenadas del vértice de la gráfica correspondiente.

b) Calcule sus ceros.

c) Elabore la gráfica correspondiente, destacando su vértice y el cero.

d) Determine si el par $(0;-49)$ pertenece a la gráfica de la función.

5. Dada la función $f_{(x)} = (x-1)^2 - 4$

a) Determinar:

- Coordenadas del vértice.
- Interceptos con los ejes coordenados.
- Un intervalo donde la función sea monótona creciente y no negativa.
- La imagen de la función en el intervalo $(-2 \geq x > 6)$.

6. El máximo de una función cuadrática es 12 y lo alcanza en x=-1. Si uno de los ceros de la función es x_o=-3:

a) Halla el otro cero de la función.

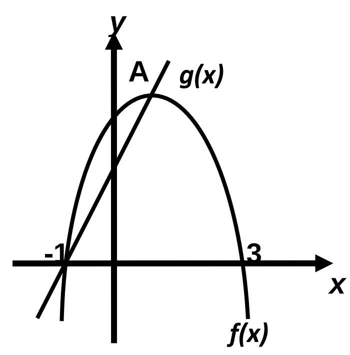
b) Escribe la ecuación de la función en la forma $y = a(x+d)^2 + e$.

c) Escribe un intervalo donde la función sea creciente.

d) ¿Para qué valores de $x \in [-3;2]$, las imágenes de la función son no positivas?

e) Esboza su gráfico en el intervalo $[-1;1]$.

7. En la gráfica están representadas las funciones $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $g(x) = mx + n$, *A* es el vértice de la parábola.



a) Determine las ecuaciones de ambas funciones.

b) ¿Para qué valores de x; *f(x)* alcanza valores negativos?

c) Diga el dominio e imagen de *f(x).*

8- Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a) ___ El conjunto imagen de la función $y = -(x+5)^2 - 2$ definida en $\Re$, es $\{y \in \Re : y \leq -2\}$.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

b) ___ La función g definida en $\Re$ por la ecuación $g_{(x)} = (x-1)^2 + 3$ es una función par.

c) ___ La imagen de la función k definida en $\Re$ por la ecuación $k_{(x)} = x^2 - 5x - 5$ en punto de abscisa $x = \sqrt{2}$, es un número racional.

d) ___ Cualquiera sea $x \in \Re$, la ecuación $y = x^2 + 2x - 3$ define una función que no tiene ceros.

e) ___ El conjunto imagen de la función q definida en $\Re$, por la ecuación $q_{(x)} = 2x^2 + 3x - 5$ es $\{y \in \Re : y \geq -5\}$.

f) ___ La función h definida en $\Re$ por la ecuación $g_{(x)} = (x+3)^2 - 4$, tiene como vértice $V(3;-4)$.

g) ___ La función $y = -x^2 + 2$, define una función par y su eje de simetría es la recta $x = 0$.

h) ___ El eje de simetría de toda función cuadrática definida en $\Re$, es la recta $x = x_v$.

i) ___ Las funciones definidas en $\Re$ por la ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$ donde a, b y c son números reales y $a < 0$, alcanza el valor mínimo en la abscisa del vértice $V(x_v; y_v)$ de la parábola.

j) ___ La función definida por la ecuación $f_{(x)} = -(x-2)^2 + 3$ tiene dos ceros, es par y admite una función inversa para $x \in [2; +\infty)$.

9. Selecciona la respuesta correcta y marca con una *x* en la línea dada.

9.1.- Dada la función definida por la ecuación $f_{(x)} = (x-7)^2$, su vértice es el punto de coordenadas:

a) ____ (7;0) b) ____ (– 7;0) c)____ (0;7) d)____ (0;– 7)

9.2.- Las coordenadas del vértice de la parábola $y = x^2 + 4x - 1$ son:

a) ___ (-1; 1) b) ___ (4; -1) c) ___ (-2; -5) d) ___ (2; 3)

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

9.3.- Los ceros de la función definida en $\Re$ por la ecuación $y = x^2 + 3x - 10$ son:

a) __ $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ b) __ $x_1 = -2$, $x_2 = -5$ c) __ $x_1 = -2$, $x_2 = 5$ d) __ $x_1 = 2$, $x_2 = -5$

9.4.- Los ceros de la función definida en $\Re$ por la ecuación $h_{(x)} = (x-2)^2 + 3$ son los puntos:

a) ___ $(2;0)$ y $\left(2+\sqrt{3};0\right)$ b) ___ $\left(2-\sqrt{-3};0\right)$ c) ___ $\left(2+\sqrt{3};0\right)$ d) ___ no tiene ceros

9.5.- El valor numérico de a, en la ecuación de la función f definida en el conjunto de los números reales por $f(x) = ax^2 - 2x + a$, siendo $f(2) = 3$ es:

a) ___ 3 b) ___ $\frac{7}{5}$ c) ___ $\frac{5}{7}$ d) ___ 2

9.6.- Una función cuadrática h definida en $\Re$, que cumple a la vez las propiedades de no tener ceros, ser par, y creciente en el intervalo $[0;+\infty)$ puede tener como ecuación:

a) __ $h(x) = (x+1)^2 - 1$ b) __ $h(x) = x^2 - 2x + 1$

c) __ $h(x) = -x^2 - 1$ d) __ $h(x) = x^2 + 1$

9.7.- De la función $y = x^2 - 4x - 3$ se conoce:

- El Dominio: $-1 \leq x \leq 5$
- Solo una de las coordenadas del Vértice **V(2;)**
- La imagen de esta función es:

a) ___ $-7 \leq y \leq 2$ b) __ $2 \leq y \leq -7$

c) ___ $-7 \leq y$ d) __ No lo puedo determinar

9.8.- Una función cuadrática tiene las siguientes propiedades:

- El eje de simetría es la recta $x = 2$.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

- Sus imágenes satisfacen la siguiente condición $8y^3 + 13 \leq 5$.

La función es:

a) ___ $y = -2(x - 2) - 1$ b) ___ $f(x) = -x^2 - 4x - 5$

c) ___ $f(x) = x^2 - 4x + 3$ d) ___ $y = (x + 2)^2 + 1$.

10- Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera en cada caso.

a) Toda función cuadrática cuyo gráfico abra hacia arriba, el signo del parámetro a es: ___.

b) Sea la función $y = (x+2)^2$, entonces su eje de simetría es: ________________________.

c) Toda función cuadrática que cumpla la condición que $f_{(x)} = f_{(-x)}$, se puede afirmar que es una función: _____________________.

d) El intercepto con el eje de ordenadas de la función $y = -x^2 + 6$ es: _________________.

e) Un ejemplo de un par ordenado que pertenezca a la función definida por la ecuación $y = -x^2 + 6$ es: _______________.

f) La función definida por la ecuación $y = (x-8)^2 + 2$, es positiva para: ________________.

g) Si $p_{(x)} = ax^2 + 2x + 1$, el valor de a para el cual se cumple que $f_{(\sqrt{3})} = 2\sqrt{3} + 10$ es ___.

h) El conjunto imagen de la función $y = (x+1)^2 - 7$ con $x \leq 2$ es: _____________________.

i) Los valores reales positivos de x para los cuales la función $y = -(x-2)^2 - 1$ son: _______.

j) Dada la función $f(x) = -x^2 - 2x + 8$.

- El vértice de la función tiene coordenadas **V (;)**
- Un intervalo con la función negativa es _______________
- La distancia entre el vértice de la función f(x) y el origen de coordenadas es ___.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

1.4. La Función Modular

- **Definición**

La correspondencia que a cada $x \in \Re$ se le hace corresponder el número real $f_{(x)} = a|x+d| + e(a \neq 0)$, donde a, d y e son números reales dados, se denomina función modular.

Ejemplos

12. $y = |x+1| - 2 \rightarrow (a = 1; d = 1; e = -2)$

13. $y = -|x-5| - 3 \rightarrow (a = -1; d = -5; e = -3)$

14. $y = 3|x-7| \rightarrow (a = 3; d = -7; e = 0)$

15. $y = |x| - 1 \rightarrow (a = 1; d = 0; e = -1)$

- **Esbozo gráfico**

En general, el gráfico de una función modular $f_{(x)} = a|x+d| + e(a \neq 0)$ son dos semirrectas de origen común desde un punto llamado vértice, cuyo eje de simetría es la recta perpendicular al eje x que contiene al vértice, y es el punto del gráfico que tiene el menor (mayor) valor de las imágenes. Los valores *a*, *d* y *e* pertenecen a los reales.

- **Cálculo de los ceros de una función modular**

La existencia de los ceros de una función modular depende del signo que tiene el parámetro *a* y el signo del valor del parámetro *e*.

Para calcular los ceros de una función modular hay que recordar que el valor modular de cualquier número es siempre positivo y el cero de cualquier función se determina igualando la ecuación a cero, para ello se analizarán tres casos de ecuaciones que definen esta función:

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Calcule los ceros de las siguientes funciones.

a) $y = |x-1|$

En este caso, igualando la función a cero obtenemos que:

$|x-1| = 0$

$(x-1) = 0 \quad -(x-1) = 0$

(Recordando que $(x-1)$ puede ser positivo o negativo)

En ambos casos al resolver las ecuaciones se obtiene que el cero es: $x_0 = 1$

b) $y = |x+1| - 2$

$|x+1| - 2 = 0$

$|x+1| = 2$ (Como $|x+1|$ es positivo, entonces los ceros son:)

$(x+1) = 2 \quad -(x+1) = 2$

Luego de resolver las ecuaciones se obtiene que los ceros son $x_1 = 1$ y $x_2 = -3$.

c) $y = |x-7| + 1$

$|x-7| + 1 = 0$

$|x-7| = -1$ (En este caso es imposible determinar los ceros ya que $|x-7|$, es un número negativo -1, y el módulo de ningún número, es negativo, siempre es positivo).

Esta función no tiene ceros.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

A modo de conclusión:

- Si el parámetro ***(e)*** no aparece en la ecuación, entonces la función tiene un único cero, que es $x_0 = -d$.
- Si el signo del parámetro ***(a)*** y el signo del parámetro ***(e)*** son diferentes, la función tiene dos ceros.
- Si el signo del parámetro ***(a)*** y el signo del parámetro ***(e)*** son iguales, la función no tiene ceros.

Algunos elementos a tener en cuenta para analizar la función modular:

- Si $-1 < a < 1$, la función se contrae y si $-1 > a > 1$, entonces la función se dilata (respecto al eje *x*).
- Si $a > 0$, la gráfica abre hacia arriba.
- Si $a < 0$, la gráfica abre hacia abajo.

Ejemplo resuelto

Sea la función h definida en $\Re$ por la ecuación $h_{(x)} = |x-1| - 2$.

a) Realice su esbozo gráfico.

b) Determine:

- Dominio
- Imagen
- Ceros
- Monotonía
- Paridad
- Coordenadas del vértice
- Valor Máximo
- Valor Mínimo
- Eje de simetría
- Intercepto con eje de ordenadas
- Signo

c) Clasifíquela en inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

<u>*Respuesta*</u>

a) Para realizar este esbozo gráfico se tomará el vértice, los ceros (en caso de que tenga), el intercepto con el eje de ordenadas (en caso de que tenga), y algunos puntos que pertenezcan a la función.

Vértice: esta función tiene la forma $y = a|x+d|+e$ *, donde el vértice tiene coordenadas* $V(-d;e)$, luego $V(1;-2)$.

Calculando el intercepto con el eje de ordenas, que se calcula evaluando la función para $x = 0$, se obtiene que el valor es $y = -1$

Calculando los ceros, que se determina igualando la ecuación a cero:

$$h_{(x)} = |x-1| - 2$$

$$|x-1| - 2 = 0$$

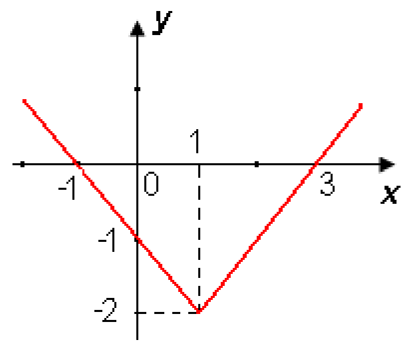
$|x-1| = 2$ (Como $|x-1|$ es positivo, entonces los ceros son:)

$(x-1) = 2 \quad -(x-1) = 2$

Luego de resolver las ecuaciones se obtiene que los ceros son $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$

Determinando el ploteo de puntos:

x	-4	-3	-2	4	5	6
y	3	2	1	1	2	3



Representando en el sistema de coordenadas el vértice, los ceros, el intercepto con el eje de las ordenadas y los puntos calculados en el ploteo, se obtiene el esbozo gráfico mostrado en la figura.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

b) Propiedades

- Dominio

El dominio de esta función es $x \in \Re$, ya que el gráfico abarca todo el eje de las abscisas, además si analizas las operaciones que intervienen en la ecuación de la función observarás que ninguna se indefine en el conjunto de los números reales.

- Imagen

Si observas el esbozo gráfico te percatarás que solo existe desde $y = -2$ hacia arriba, luego la imagen de esta función es $y \in \Re : y \geq -2$.

- Ceros

Ya se calcularon los ceros par el esbozo gráfico, estos son: $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$

- Monotonía

Al analizar el esbozo gráfico de la función de izquierda a derecha, te percatarás que tiene intervalos donde crece y donde decrece, es decir a la izquierda de la x_v ella decrece y a la derecha crece, luego la función es monótona decreciente para $x \leq 1$, y monótona creciente para $x \geq 1$.

- Paridad

Recuerda que debes analizar si es par o impar:

Para que sea par debe cumplirse que $h_{(x)} = h_{(-x)}$ y al calcular no se cumple ya que: $|x-1|-2 \neq |-x-1|-2$, luego la función no es par.

Para que sea impar debe cumplirse que $h_{(x)} = -h_{(-x)}$ y al calcular no se cumple ya que: $|x-1|-2 \neq -|-x-1|+2$, luego la función no es impar.

A modo de conclusión esta función no es par ni impar.

- Coordenadas del vértice

Ya determinamos las coordenadas del vértice para el esbozo gráfico que es $V(1;-2)$

- Valor Máximo

Si te percatas en esta función su gráfico abre hacia arriba, por lo que no tiene valor máximo.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

- Valor Mínimo

Al analizar la imagen de esta función observarás que es $y \in \Re : y \geq -2$, es decir el gráfico está desde $y = -1$ hacia arriba, por lo que sí tiene valor mínimo, que es $y = -2$ en $x = 1$

- Eje de simetría

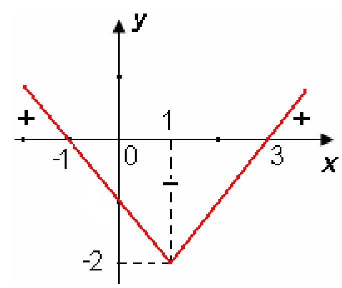
La función cuadrática tiene como eje de simetría la recta $x = x_v$, en este caso el eje de simetría es $x = 1$.

- Intercepto con el eje de ordenadas

Ya se calculó el intercepto con este eje para el esbozo gráfico que es el valor $y = -1$.

- Signo

Para el signo, basta con analizar el eje de las abscisas utilizando los ceros, y ubicar los signos correspondientes, recuerda que lo que se hace es resolver una inecuación modular, obteniéndose el esbozo gráfico de la figura, luego el signo de esta función es:



Positiva: $\{x \in \Re : -1 > x > 3\}$

Negativa: $\{x \in \Re : -1 < x < 3\}$

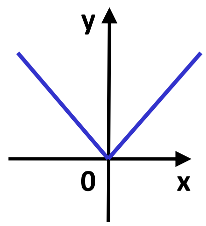
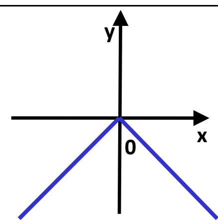
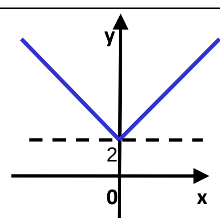
c) Esta función no es inyectiva, recuerda que para que sea inyectiva, la función debe ser estrictamente creciente o decreciente, y esta tiene intervalos de crecimiento y decrecimiento, luego puedes concluir que no es inyectiva, por lo que tampoco puede ser biyectiva. Otra forma para demostrar que no es inyectiva es la prueba de la recta paralela al eje de las abscisas, si lo verificas observarás que la corta en más de un punto.

Analiza entonces que esta función no tiene imagen plena, por lo que no puede ser sobreyectiva.

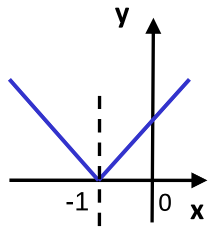
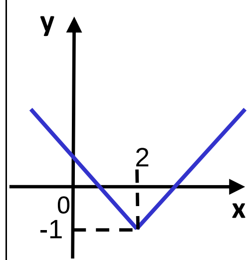
Luego tampoco es biyectiva.

A continuación, se ofrece un cuadro resumen con las distintas maneras en que puede aparecer expresada una función modular, su esbozo gráfico y algunas de sus propiedades principales.

Tratamiento didáctico a las funciones elementales en la enseñanza de las matemáticas
Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Ecuac.	Ejemplo	Esbozo gráfico	Dom	Imag	Ceros	Monot	Par.	V. Máx	V. Mín	Signo
y = |x |	$y = \|x\|$		$x \in \Re$	$y \in \Re:$ $y \geq 0$	$x_1 = 0$	MD $x \leq 0$ MC $x \geq 0$	Par	-----	y = 0 en x = 0	No negativa
	$y = -\|x\|$		$x \in \Re$	$y \in \Re:$ $y \leq 0$	$x_1 = 0$	MC $x \leq 0$ M.D $x \geq 0$	Par	y = 0 en x = 0	-----	No positiva
y = |x |+ e	y = |x |+ 2		$x \in \Re$	$y \in \Re:$ $y \geq 2$	-----	M.C $x \leq 0$ M.D $x \geq 0$	Par	-----	y = 2 en x = 0	posit. $x \in \Re$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

y = |x + d|	y = |x + 1|		$x \in \Re$	$y \in \Re$: $y \geq 0$	$x_1 = -1$	M.C $x \leq -1$ M.D $x \geq -1$	No es par ni impar	-----	y = 0 en x = -1	No negativa
y = |x + d|+ e	y = |x + d|+ e		$x \in \Re$	$y \in \Re$: $y \geq -1$	$x_1 = 1$; $x_2 = 3$	M.C $x \leq 2$ M.D $x \geq 2$	No es par ni impar	-----	y = -1 en x = 2	negat. $1<x<3$ posit. $1>x>3$

Ejercicios del epígrafe

1. Representa gráficamente y determina dominio, imagen y monotonía de las siguientes funciones:

a) $y = | x | - 3$

b) $y = | x + 2 | + 1$

c) $y = - | x - 2 | + 2$

d) $y = | x | + 4$ (con $x \geq - 1$)

2. Representa gráficamente e investiga la monotonía de la función h(x) = |x – 2 |+ 3, en el intervalo [1; 9)

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

3. Se tiene la función $q_{(x)} = |x+5| - k$, de la cual se sabe que: $q_{(2)} = -1$.

a) Determine el valor de *k*, y escribe la ecuación $q_{(x)}$.

b) ¿Es q una función que no es par ni impar? Justifique su respuesta.

c) Determine los valores del dominio para los cuales las imágenes son positivas.

4. Determine la imagen de la función $y = |x-2| - 5$, en el intervalo $\left]-\infty;2\right]$.

5. Dada la función definida por la ecuación $q_{(x)} = -|x-8| + 4$:

a) ¿Es q una función par? Justifique.

b) ¿Es q una función con imagen plena? Justifique.

c) Realice su esbozo gráfico.

d) Verifica si el punto $A(2;-2)$ pertenece a la función q.

6. Sea la función $y = |x+1| - 4$.

a) Realice su esbozo gráfico.

b) Determine su monotonía.

c) Escriba un intervalo donde la función sea monótona creciente y negativa.

d) ¿Es esta función par? Justifique su respuesta.

7. De una función modular de la forma $y = |x+d| + e$, se sabe que:

- Tiene como eje de simetría la recta $x = 4$.
- Su conjunto imagen es $\{y \in \Re : y \leq 2\}$

a) Escriba su ecuación.

b) Esboce su gráfico.

c) ¿Es esta función par? Justifica con cálculos.

8. Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a) ___ La función f definida en $\Re$ por $f(x) = |x| - 1$ no tiene ceros.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

b) ___ La función definida en $\Re$ de ecuación $y = |x| + 2$, es par.

c) ___ La función g definida en $\Re$ por la ecuación $g_{(x)} = |x-1|$ es inyectiva.

d) ___ La función definida por la ecuación $y = |x| + 3$ es sobreyectiva.

e) ___ La función definida por la ecuación $y = |x| + 1$ con $(x \leq 2)$, es par.

f) ___ La función m definida en $\Re$, por $m_{(x)} = -|x| + 1$ tiene un único cero.

g) ___ La función definida en $\Re$ por la ecuación $y = -|x-1|$, tiene como imagen $y \in \Re$.

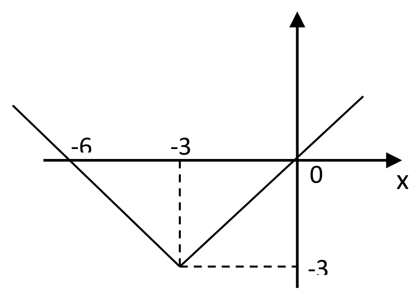
h) ___ Toda función de la forma $y = a|x+d| + e$, con $a \neq 0, d = 0, e \neq 0$, es par.

i) ___ El dominio de definición de la función definida por la ecuación $h_{(x)} = 4|x+3| - 7$, es el conjunto de los números reales.

j) ___ La función h definida en $\Re$ por la ecuación $h_{(x)} = |x+5| + 7$, es positiva en todo su dominio.

9. Selecciona la respuesta correcta y marca con una *x* en la línea dada.

9.1- Si el gráfico corresponde a una función cuya ecuación tiene la forma $y = |x+a| + b$, entonces su ecuación es:



a) ___ $y = |x-3| + 3$ b) ___ $y = |x+3| - 3$

c) ___ $y = |x-3| - 3$ d) ___ $y = |x+3| + 3$

9.2- La función cuya ecuación es $f(x) = |x-1| - 8$, tiene ceros para x igual a:

a) ___ -9 y 7 b) ___ 1 y 8 c) ___ -1 y -8 d) ___ 9 y -7

9.2.- El conjunto imagen de la función $y = -|x-8| + 7$, es:

a) __ $\{y \in \Re\}$ b) __ $\{y \in \Re : y < 7\}$ c) __ $\{y \in \Re : y \geq 7\}$ d) __ $\{y \in \Re : y \leq 7\}$

9.3.- Sea la función $y = |x+5| - 3$, entonces se puede afirmar que:

a) ___ La función es sobreyectiva y par.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

b) ___ La función tiene como eje de simetría la recta $x=-5$ y tiene dos ceros.

c) ___ La función es monótona creciente en todo su dominio.

d) ___ La función tiene valor máximo y es inyectiva.

9.4.- Se tiene la función modular $f_{(x)}=|x+1|+e$, además se conoce que su imagen cumple la condición que $2y^3 \geq -16$, entonces el vértice de la función tiene coordenadas:

a) __ $V(1;-2)$ b) __ $V(-1;2)$ c) __ $V(-1;-16)$ d) __ $V(-1;-2)$

9.5.- De una función de la forma $y=a|x+d|+e$, se sabe que:

- $a=-1$; el eje de simetría es la recta de la ecuación $x=-8$ y su valor máximo lo alcanza en $y=-9$.

Entonces la ecuación de esta función es:

a) __ $y=|x-8|-9$ b) __ $y=|x+8|-9$ c) __ $y=-|x-8|-9$ d) __ $y=-|x+8|-9$

10. Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera en cada caso.

a) La función definida por la ecuación $y=|x-1|+1$ intercepta al eje ***y*** en el punto: ___________.

b) La imagen de la función $y=-|x-1|$ en el intervalo $(1;6)$ es ___________________________.

c) Toda función modular definida en $\Re$ cuyo vértice se encuentre situado en el eje de las ordenadas es una función ____________________.

d) Un intervalo donde la función $y=|x-4|-5$ sea negativa y decreciente es: ______________.

e) El valor máximo que alcanza la función $k_{(x)}=-|x+8|-7$ es __________________________.

f) El vértice de la función definida por la ecuación $y=|x+2{,}2|-0{,}7$ es: ___________________.

g) El eje de simetría de la función $y=-3|x-1|-2{,}9$ es la recta __________________________.

h) Un ejemplo de una función modular que tenga valor mínimo y sea par es: ______________.

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

i) Los valores reales de x para los cuales el gráfico de la función $y=|x-5|-1$ corta al eje de las abscisas son: ________________________.

j) Un ejemplo de una función modular que sea monótona creciente en todo su dominio y además sea inyectiva es: ____________________________.

1.5. La Función de Proporcionalidad Inversa

- **Definición**

La correspondencia que a cada $x \in \Re$ se le hace corresponder el número real $f_{(x)}=\dfrac{a}{x+d}+e;(a\neq 0; x\neq -d)$, donde a, d y e son números reales dados, se denomina función de proporcionalidad inversa.

- **Ejemplos**

1. $y=\dfrac{1}{x+2}-3 \rightarrow (a=1; d=2; e=-3)$

2. $y=-\dfrac{1}{x+3}+7 \rightarrow (a=-1; d=3; e=7)$

3. $y=\dfrac{2}{x+3}-1 \rightarrow (a=2; d=3; e=-1)$

4. $y=\dfrac{3}{x}-4 \rightarrow (a=3; d=0; e=-4)$

5. $y=\dfrac{1}{x-5} \rightarrow (a=1; d=-5; e=0)$

- **Esbozo gráfico**

En general el esbozo gráfico de una función del tipo $f_{(x)}=\dfrac{a}{x+d}+e;(a\neq 0; x\neq -d)$, este gráfico consta de dos curvas que reciben el nombre de hipérbola equilátera, donde el punto de coordenadas $(-d; e)$, recibe el nombre de punto de salto, y es hasta donde se trasladan las asíntotas de la función.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Algunos elementos a tener en cuenta para analizar la función de proporcionalidad inversa:

- Si $-1 < a < 1$, la función se contrae y si $-1 > a > 1$, entonces la función se dilata (respecto al eje *x*).
- Si $a > 0$, la función es decreciente y la hipérbola se encuentra en el tercer y primer cuadrante.
- Si $a < 0$, la función es creciente y la hipérbola se encuentra en el segundo y cuarto cuadrante.

Ejemplo resuelto

Sea la función t definida en $\Re$ por la ecuación $t_{(x)} = \dfrac{1}{x-2} - 3$.

a) Realice su esbozo gráfico.

b) Determine:

- Dominio
- Imagen
- Ceros
- Monotonía
- Paridad
- Coordenadas del punto de salto
- Valor Máximo
- Valor Mínimo
- Intercepto con eje de ordenadas
- Signo

c) Clasifíquela en inyectiva, sobreyectiva o biyectiva, en su conjunto imagen.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Respuesta

a) Para realizar este esbozo gráfico se tomará el punto característico, los ceros (en caso de que tenga), el intercepto con el eje de ordenadas (en caso de que tenga), y algunos puntos que pertenezcan a la función.

Punto característico: esta función tiene la forma $y = \frac{a}{x+d} + e$, donde el punto de salto tiene coordenadas $(2;-3)$.

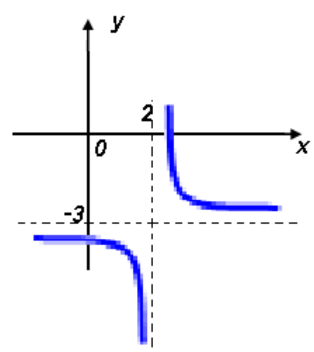
Calculando el intercepto con el eje de ordenas, que se calcula evaluando la función para $x = 0$, se obtiene que el valor es $y = -\frac{7}{2}$.

Calculando los ceros, que se determina igualando la ecuación a cero, se obtiene que es $x_0 \approx 2{,}3$.

Determinando el ploteo de puntos:

x	-2	-1	1	3	4	5
y	-3.25	-3.33	-4	-2	-2.5	-2.7

Representando en el sistema de coordenadas el punto de salto, el cero, el intercepto con el eje de las ordenadas y los puntos calculados en el ploteo, se obtiene el esbozo gráfico mostrado en la figura.



b) Propiedades

- Dominio

Si analizas las operaciones que aparecen en su ecuación, observarás que solo se indefine en el conjunto de los números reales, la división, luego el divisor tiene que ser distinto de cero; por lo que el dominio de esta función es $x \in \Re : x \neq 2$. En el gráfico observarás claramente la asíntota vertical que es la que define el dominio de esta función.

- Imagen

Si observas el esbozo gráfico te percatarás que tiene una asíntota horizontal, luego la imagen de esta función es $y \in \Re : y \neq -3$.

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

- Ceros

Ya se calcularon los ceros par el esbozo gráfico, estos son: $x_0 = 2{,}3$

- Monotonía

Esta función al analizar su esbozo gráfico de izquierda a derecha observarás que es decreciente en todo su dominio.

- Paridad

Recuerda que debes analizar si es par o impar:

Para que sea par, debe cumplirse que $t_{(x)} = t_{(-x)}$ y al calcular no se cumple ya que: $\frac{1}{x-2} - 3 \neq -\frac{1}{x+2} - 3$, luego la función no es par.

Para que sea impar debe cumplirse que $t_{(x)} = -t_{(-x)}$ y al calcular no se cumple ya que: $\frac{1}{x-2} - 3 \neq \frac{1}{x+2} + 3$ luego la función no es impar.

A modo de conclusión, esta función no es par ni impar.

- Coordenadas del punto de salto (punto donde se cortan las asíntotas)

Ya determinamos las coordenadas de este punto para el esbozo gráfico que es $(2;-3)$

- Valor Máximo

Si te percatas esta función no tiene valor máximo.

- Valor Mínimo

Si te percatas esta función no tiene valor mínimo.

- Eje de simetría

Esta función no tiene eje de simetría.

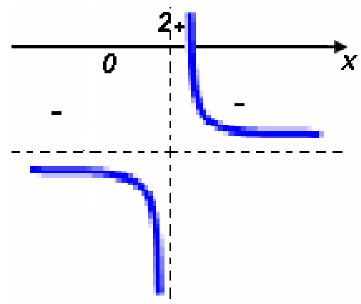
- Intercepto con eje de ordenadas

Ya se calculó el intercepto con este eje para el esbozo gráfico que es el valor $y = -\frac{7}{2}$.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

- Signo

Para el signo, basta con analizar el eje de las abscisas, utilizar los ceros y ubicar los signos correspondientes, recuerda que lo que se hace es resolver una inecuación fraccionaria, obteniéndose el esbozo gráfico de la figura, luego el signo de esta función es:



Positiva: $\{x \in \Re : 2 < x < 2{,}3\}$

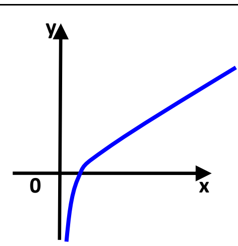
Negativa: $\{x \in \Re : 2 > x > 2{,}3\}$

c) Esta función es inyectiva, recuerda que para que sea inyectiva, la función debe ser estrictamente creciente o decreciente, y esta es decreciente. Otra forma para demostrar que es inyectiva es la prueba de la recta paralela al eje de las abscisas, si lo verificas observarás que la corta en un punto.

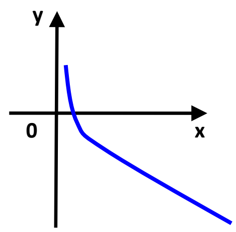
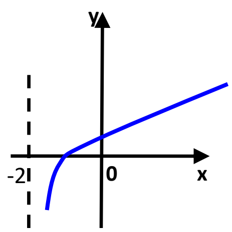
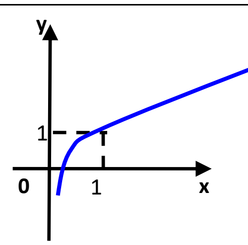
Analiza entonces que esta función no tiene imagen plena, por lo que no puede ser sobreyectiva

Luego la función no es biyectiva.

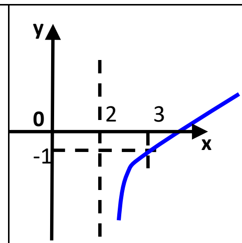
A continuación, se ofrece un cuadro resumen con las distintas maneras en que puede aparecer expresada una función de proporcionalidad inversa, su esbozo gráfico y algunas de sus propiedades principales.

Ecuación	Ejemplo	Desplazam	Esbozo gráfico	Dom	Imag	Ceros	Mon	I. Ord	Signo
$y = \log_a x$	$y = \log_2 x$	Asínt. $x = 0$ $(-d+1; e)$ $(1;0)$		$x \in \Re_+^*$	$y \in \Re$	$x = 1$	M.C	-----	negativa $0 < x < 1$ positiva

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

									$x > 1$
	$y = \log_{\frac{1}{3}} x$	Asínt. $x = 0$ $(-d+1; e)$ $(1;0)$		$x \in \Re^*_+$	$y \in \Re$	$x = 1$	M.D	-----	negativa $x > 1$ positiva $0 < x < 1$
$y = \log_a(x+d)$	$y = \log_4(x+2)$	Asínt. $x = -2$ $(-d+1; e)$ $(-1;0)$		$x \in \Re :$ $x > -2$	$y \in \Re$	$x = -1$	M.C	$y = \frac{1}{2}$	negativa $-2 < x < -1$ positiva $x > -1$
$y = \log_a x + e$	$y = \log_2 x + 1$	Asínt. $x = 0$ $(-d+1; e)$ $(1;1)$		$x \in \Re^*_+$	$y \in \Re$	$x = \frac{1}{2}$	M.C	-----	negativa $0 < x < \frac{1}{2}$ positiva $x > \frac{1}{2}$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
Book Citation Index
Web of Sciece/Core Collection
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

$y=\log_a(x+d)+e$	$y=\log_3(x-2)-1$	Asínt. $x=2$ $(-d+1;e)$ $(3;-1)$	 	$x \in \Re :$ $x>2$	$y \in \Re$	$x=5$	M.C	-----	negativa $2<x<5$ positiva $x>5$

Ejercicios del epígrafe

1. Determina a cuál de los gráficos de las funciones $f_{(x)}=\dfrac{2}{x}$ y $g_{(x)}=\dfrac{1}{x+3}-2$, pertenecen los siguientes puntos: *A(0,5 ; 4)* , *B(–4 ; –3)* , *C(10 – 1 ; 20)* y *D(–3,2 ; –7).* Determine sus dominios, imágenes, ceros y monotonía.

2. Dada la función definida por la ecuación $y=\dfrac{1}{x}-7$.

a) Indique su dominio e imagen.
b) ¿Es esta función impar? Justifique.
c) ¿Se pude afirmar que la función es decreciente en todo su dominio? ¿Por qué?
d) Verifica si el punto $K(-1;4)$, pertenece al gráfico de la función

3. Se tiene la función $d_{(x)}=-\dfrac{1}{x+6}-1$.

a) Realice su esbozo gráfico.
b) ¿Es d una función inyectiva? Justifica.
c) Determine las asíntotas.
d) Diga su dominio e imagen.

Book Citation Index
Web of Sciece/Core Collection
ETECAM Editorial Tecnocientífica Americana Estados Unidos de América
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

4. Si la siguiente ecuación $y = \frac{2}{x-7} + 1$, define una función de proporcionalidad inversa. Analice y responda.

a) Dominio, imagen y ceros.
b) ¿Es esta función inyectiva? Justifique.
c) ¿En qué punto corta esta función al eje de las ordenadas?
d) ¿Es esta función par? Justifique.

5. Dada la función $z_{(x)} = \frac{1}{x-3} - 1$.

a) Realice su esbozo gráfico para $x > 4$.
b) ¿Es z una función inyectiva? Justifica tu respuesta.
c) Se puede afirmar que la función z no es par ni impar. ¿Por qué?
d) ¿La imagen de la función z en el punto de abscisa $x = 9$, es un número fraccionario?

6. Dada la ecuación de la función $f_{(x)} = 2 + \frac{7}{x+5}$

a) Determina dominio e imagen de f.

b) ¿Es f una función que no es par ni impar? Justifica.

c). ¿Cuál es la asíntota vertical de la función f? ¿Y cuál la asíntota horizontal?

d). Halla todos los valores del dominio, para los cuales se cumple que f es positiva.

7. Dadas las funciones $m(x) = 3x + 2$ y $n(x) = 9x^{-1} + 2$.

a) Calcula los ceros de n.
b) Halla la imagen de n.
c) Escribe la ecuación de la función $q(x) = \frac{n(3)}{m(x)}$.
d) Determina dominio e imagen de q.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

8. Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a) ___ La función definida por la ecuación $y = -\frac{1}{x+6} - 7$ tiene como dominio $x \in \Re : x \neq -6$.

b) ___ La función $y = \frac{1}{x-1} + 1$ es positiva para $\{x \in \Re : 0 > x > 1\}$.

c) ___ La función definida por la ecuación $f(x) = -\frac{1}{x+5} + 9$, es monótona decreciente en todo su dominio.

d) ___ La función f definida por la ecuación $f_{(x)} = \frac{1}{x} + 2$, es negativa para todo valor real x tal que $x < 0$.

e) ___ El conjunto imagen de la función h de ecuación $h_{(x)} = \frac{1}{x+8}$, es $\{y \in \Re : y \neq 0\}$.

f) ___ La función k definida por la ecuación $k_{(x)} = \frac{1}{x+2} - 3$, es negativa para las $x > -\frac{5}{3}$.

g) ___ La función m definida por la ecuación $m_{(x)} = \frac{1}{x-7} - 1; x \neq 7$, no tiene ceros.

h) ___ La función g, definida en el conjunto $\{x \in \Re : x \neq 4\}$ por la ecuación $g_{(x)} = \frac{1}{x-4}$, es impar.

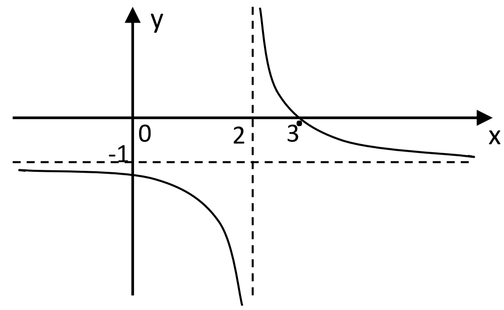
i) ___ La función definida por la ecuación $t_{(x)} = \frac{1}{x+9}$ no tiene asíntota horizontal.

j) ___ La función h definida por la ecuación $h_{(x)} = \frac{1}{x} + 8$ corta al eje de las ordenadas en $y = 8$.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

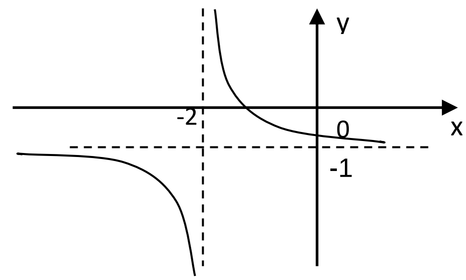
9. Selecciona la respuesta correcta y marca con una *x* en la línea dada.

9.1. Si el gráfico corresponde a una función cuya ecuación tiene la forma $y = \frac{1}{x-a} + b$, entonces su ecuación es:



a) __ $y = \frac{1}{x+2} + 1$ b) __ $y = \frac{1}{x-2} - 1$

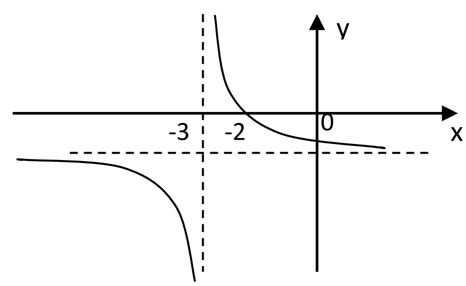
c) __ $y = \frac{1}{x+2} + 3$ d) __ $y = \frac{1}{x-2} + 1$



9.2. El gráfico de la función representada corresponde a una función del tipo $y = \frac{1}{x+d} + e$. El punto **(d;e)** tiene por coordenadas:

a) ___ (-2;-1) b) ___ (2;1)

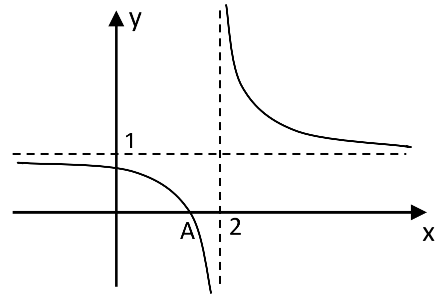
c) ___ (2;-1) d) ___ (-2;1)



9.3. El gráfico de la función representada corresponde a una función del tipo $y = \frac{1}{x+3} + k$; y corta al eje de las abscisas en el punto (-2;0). Entonces el valor de **k** es:

a) ___ -2 b) ___ -3 c) ___ 1 d) ___ -1

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024



9.4. El gráfico corresponde a la función definida por la ecuación $y = \frac{1}{x-2} + 1$. Las coordenadas del punto **A** son:

a) ___ (1; 2) b) ___ (2; 1) c) ___ (1; 0) d) ___ (0; 1)

9.5. Si $f(x) = \frac{1}{x-2} + 5$ y $g(x) = \frac{1}{x-5} + 2$, entonces:

a) ___ Ambas funciones son crecientes

b) ___ g(x) tiene por imagen al conjunto $\{y \in \Re : y \neq 5\}$.

c) ___ f(x) tiene una asíntota horizontal en $x = 2$.

d) ___ f(x) y g(x) son periódicas.

10. Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera en cada caso.

a) El cero de la función $y = -\frac{2}{x} + 2$ es: ________________________.

b) La función definida por la ecuación $f_{(x)} = \frac{3}{x+4}$, tiene como asíntotas $x =$ ____ y $y =$ ____ .

c) El dominio de la función definida por $y = -\frac{4}{x+4} - 7$, es: ______________.

d) La imagen de la función definida por la ecuación $y = \frac{1}{x-7}$ es: _________.

e) El gráfico de la función definida por la ecuación $y = \frac{4}{x+5} - 1$, corta al eje de las ordenadas en: _______________.

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

f) La imagen de la función definida por $y=-\frac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x=-1$ pertenece al conjunto de los números __________.

g) Un ejemplo de una ecuación que defina una función de proporcionalidad inversa, que cumpla la condición de ser impar y decreciente es: ______________________.

h) El dominio de la función $y=-\frac{1}{x-2}+5$ en el punto de ordenada $y=1$ es: _______________.

i) La función $y=\frac{1}{x-3}+e$ pasa por el punto **(4; 0),** entonces el valor del parámetro e es: _____.

j) Los valores reales negativos para los cuales el gráfico de la función $g_{(x)}=\frac{1}{x-7}+2$ está por encima de la ordenada 5 es: ________________.

1.6. La Función Cúbica

- **Definición**

La correspondencia que a cada $x \in \Re$ se le hace corresponder el número real $f_{(x)}=a(x+d)^3+e;(a \neq 0)$, donde a, d y e son números reales dados, se denomina función cúbica.

- **Ejemplos**

1. $y=(x+2)^3-1 \rightarrow (a=1; d=2; e=-1)$

2. $y=-(x+2)^3-8 \rightarrow (a=-1; d=2; e=-8)$

3. $y=2(x-3)^3+1 \rightarrow (a=2; d=-3; e=1)$

4. $y=x^3-6 \rightarrow (a=1; d=0; e=-6)$

5. $y=(x+4)^3 \rightarrow (a=1; d=4; e=0)$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

- **Esbozo gráfico**

En general el esbozo gráfico de una función del tipo $f_{(x)} = a(x+d)^3 + e; (a \neq 0)$ recibe el nombre de parábola cúbica, donde el punto de coordenadas $(-d; e)$, recibe el nombre de punto de inflexión, y es hasta donde se traslada el origen de la función.

Algunos elementos a tener en cuenta para analizar la función cúbica:

- Si $-1 < a < 1$, la función se contrae y si $-1 > a > 1$, entonces la función se dilata (respecto al eje *x*).
- Si $a > 0$, la función es creciente y la curva se encuentra en el tercer y primer cuadrante.
- Si $a < 0$, la función es decreciente y la curva se encuentra en el segundo y cuarto cuadrante.

Ejemplo resuelto

Sea la función k definida en $\Re$ por la ecuación $k_{(x)} = (x+1)^3 - 1$.

a) Realice su esbozo gráfico.

b) Determine:

- Dominio
- Imagen
- Ceros
- Monotonía
- Paridad
- Coordenadas del punto de inflexión
- Valor Máximo
- Valor Mínimo
- Intercepto con eje de ordenadas
- Signo

c) Clasifíquela en inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Respuesta

a) Para realizar este esbozo gráfico se tomará el punto característico, los ceros (en caso de que tenga), el intercepto con el eje de ordenadas (en caso de que tenga), y algunos puntos que pertenezcan a la función.

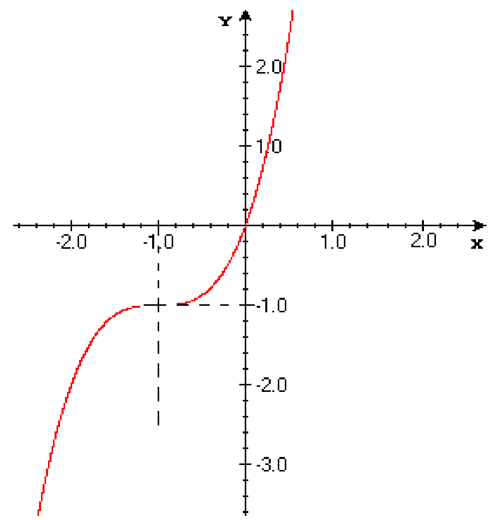
Punto de inflexión: esta función tiene la forma $y = a(x+d)^3 + e;(a \neq 0)$, donde el punto de inflexión tiene coordenadas $(-1;-1)$.

Calculando el intercepto con el eje de ordenas, que se calcula evaluando la función para $x = 0$, se obtiene que el valor es $y = 0$.

Calculando los ceros, que se determina igualando la ecuación a cero, se obtiene que es $x_0 = 0$.

Determinando el ploteo de puntos:

x	-3	-2	-0.5	0	1
y	-9	-2	-0.9	0	7



Representando en el sistema de coordenadas el punto de inflexión, el cero, el intercepto con el eje de las ordenadas y los puntos calculados en el ploteo, se obtiene el esbozo gráfico mostrado en la figura.

b) Propiedades

- Dominio

Si analizas las operaciones que aparecen en su ecuación, observarás que ninguna se indefine en el conjunto de los números reales, por lo que el dominio de esta función es $x \in \Re$. En el gráfico observarás claramente que este abarca todo el eje de las abscisas.

- Imagen

Si despejas la variable y y analizas las operaciones a las que es sometida, observarás que ninguna se indefine en el conjunto de los números reales, por lo que la imagen de esta función es $y \in \Re$. En el gráfico observarás claramente que este abarca todo el eje de las abscisas.

- Ceros

Ya se calculó para el esbozo gráfico que es: $x_0 = 0$

- Monotonía

Esta función, al analizar su esbozo gráfico de izquierda a derecha, observarás que es monótona creciente en todo su dominio.

- Paridad

Recuerda que debes analizar si es par o impar:

Para que sea par, debe cumplirse que $k_{(x)} = k_{(-x)}$ y al calcular no se cumple, ya que: $(x+1)^3 - 1 \neq (-x+1)^3 - 1$, luego la función no es par, además su gráfico no es simétrico respecto al eje de las ordenadas.

Para que sea impar, debe cumplirse que $k_{(x)} = -k_{(-x)}$ y al calcular no se cumple, ya que $(x+1)^3 - 1 \neq -(-x+1)^3 + 1$; luego la función no es impar, además su gráfico no es simétrico respecto al origen de coordenadas.

A modo de conclusión, esta función no es par ni impar.

- Coordenadas del punto de inflexión

Ya determinamos las coordenadas de este punto para el esbozo gráfico que es: $(-1;-1)$

- Valor Máximo

Si te percatas esta función no tiene valor máximo.

- Valor Mínimo

Si te percatas esta función no tiene valor mínimo.

- Eje de simetría

Esta función no tiene eje de simetría.

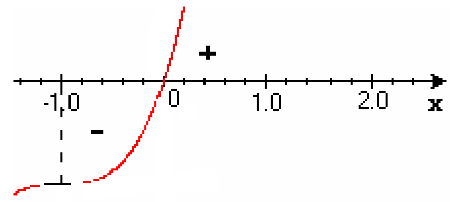
- Intercepto con eje de ordenadas

Ya se calculó el intercepto con este eje para el esbozo gráfico que es el valor $y = 0$.

- Signo

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Para el signo, basta con analizar el eje de las abscisas, utilizando los ceros y ubicar los signos correspondientes, recuerda que lo que se hace es resolver una inecuación cúbica, obteniéndose el esbozo gráfico de la figura, luego el signo de esta función es:



Positiva: $\{x \in \Re : x > 0\}$

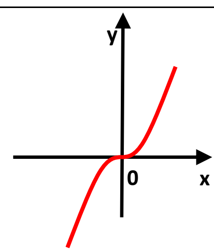
Negativa: $\{x \in \Re : x < 0\}$

c) Esta función es inyectiva, recuerda que para que sea inyectiva, la función debe ser estrictamente creciente o decreciente, y esta es creciente. Otra forma para demostrar que es inyectiva es la prueba de la recta paralela al eje de las abscisas, si lo verificas observarás que la corta en un punto.

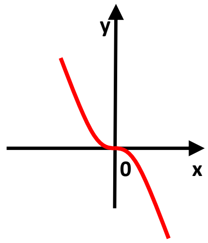
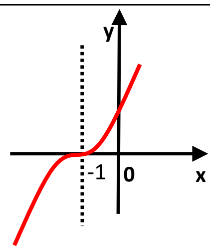
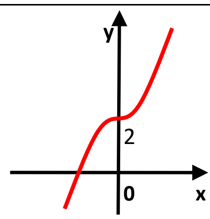
Analiza entonces que esta función tiene imagen plena, por lo que es sobreyectiva.

Luego la función es biyectiva.

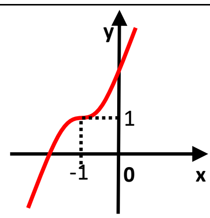
A continuación, se ofrece un cuadro resumen con las distintas maneras en que puede aparecer expresada una función cúbica, su esbozo gráfico y algunas de sus propiedades principales.

Ecuac.	Eje m	Despla	Esbozo gráfico	Dom	Imag	Ceros	Mon	Par.	I. Ord	Signo
$y = x^3$	$y = x^3$	$x = 0$ $y = 0$ (0;0)		$x \in \Re$	$y \in \Re$	$x = 0$	M.C	Impar	$y = 0$	negat. $x<0$ posit. $x>0$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

	$y = -x^3$	$x = 0$ $y = 0$ $(0;0)$		$x \in \Re$	$y \in \Re$	$x = 0$	M.D	Impar	$y = 0$	negat. $x>0$ posit. $x<0$
$y = (x+d)^3$	$y = (x+1)^3$	$x = -1$ $y = 0$ $(-1;0)$		$x \in \Re$	$y \in \Re$	$x = -1$	M.C	No es par ni impar	$y = 1$	negat. $x<-1$ posit. $x>-1$
$y = x^3 + e$	$y = x^3 + 2$	$x = 0$ $y = 2$ $(0;2)$		$x \in \Re$	$y \in \Re$	$x = \sqrt[3]{-2}$	M.C	No es par ni impar	$y = 2$	negat. $x<\sqrt[3]{-2}$ posit. $x>\sqrt[3]{-2}$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
Book Citation Index
Web of Sciece/Core Collection
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

$y = (x+d)^3+e$	$y = (x+1)^3+1$	$x = -1$ $y = 1$ $(-1;1)$		$x \in \Re$	$y \in \Re$	$x = -2$	M.C	No es par ni impar	$y = 2$	negat. $x<-2$ posit. $x>-2$

Ejercicios del epígrafe

1. Dadas las funciones: $f(x) = x^3 + 5;\ g(x) = (x-3)^3$

a) Determina a cuál de ellas pertenecen los siguientes puntos: $A(2;-1)$, $B(0;5)$, $C(-1;4)$

b) Represéntalas gráficamente y analiza sus propiedades.

2. Realiza el esbozo gráfico y determina las propiedades de las funciones:

a) $y = (x+2)^3$

b) $y = -(x-7)^3 + 4$

c) $y = (x+5)^3 - 1$

d) $y = (x+4)^3 - 8(x>5)$

3. Si h es una función del tipo $h(x) = (x + d)^3 + e$, de la cual se conoce que pasa por el origen de coordenadas y además el punto $(3;3^2)$, pertenece al gráfico de h.

a) Halla la ecuación de h.

b) Determina si el par ordenado $(4;4^2)$ pertenece o no, al gráfico de h.

c) ¿Es la función h inyectiva? Justifica.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

4. Sea la función $g_{(x)} = (x-4)^3 + 0{,}8$.

a) Realice su esbozo gráfico.
b) Determine dominio, imagen y ceros.
c) ¿Es g una función monótona creciente? Justifique.
d) Es g una función que no es par ni impar. ¿Por qué?

5. De una función de la forma $z_{(x)} = (x+d)^3 + 1$, se sabe que su gráfico pasa por el punto $A(-2;9)$.

a) Escriba su ecuación.
b) Indique monotonía e imagen.
c) ¿Es z una función impar? Justifique.

6. De una función del tipo $y = (x+d)^3 + e$, se sabe que su punto de inflexión tiene coordenadas $(7;-8)$.

a) Escriba su ecuación.
b) Esboce su gráfico.
c) Determine sus ceros, monotonía y paridad.

7. Se sabe que para la función $m_{(x)} = (x+d)^3 + e$ se cumple que $m_{(0)} = 2$ y $m_{(-2)} = 0$.

a) Escriba su ecuación.
b) Esboce su gráfico.
c) Determine: dominio, imagen, monotonía y coordenadas del punto de inflexión.
d) ¿Es m una función impar? ¿Por qué?

8. Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a) ___ La imagen de la función s definida en el conjunto de los números reales a través de la ecuación $s_{(x)} = \dfrac{2x^3+7}{4}$, es el conjunto de los números reales.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

b) ___ La función g definida en $\Re$ por $g_{(x)} = 2x^3$, es par.

c) ___ El gráfico de la función definida en $\Re$ por la ecuación $h_{(x)} = x^3 - 27$ corta al eje de las abscisas en el punto de coordenadas (3; 0).

d) ___ El dominio de definición de la función $y = (x+2)^3$ es $x \in \Re^*$.

e) ___ La imagen de la función $y = (x+1)^3 - 10$ en el punto de abscisa $x = 1{,}5$, es un número fraccionario.

f) ___ La función definida en $\Re$ por la ecuación $y = (x+5)^3 - 1$, es monótona creciente.

g) ___ La función $y = (x+9)^3 - 7$, es impar.

h) ___ El gráfico de la función definida en $\Re$ de ecuación $f(x) = x^3 + 8$, corta al eje de las ordenadas en el punto de coordenadas $(-2;0)$.

i) ___ La función definida en $\Re$ por la ecuación $y = -(x-2)^3 - 1$, es positiva para $\{x \in \Re\}$.

j) ___ Toda función cúbica de ecuación $y = (x+d)^3 + e; (d \neq 0; e = 0)$, es impar.

9. Selecciona la respuesta correcta y marca con una *x* en la línea dada.

9.1. Dada la función **f** definida por la ecuación $f_{(x)} = -(x+1)^3 - 16$. Entonces podemos afirmar que:

b) ___ f tiene un mínimo en el punto (-1; -16).

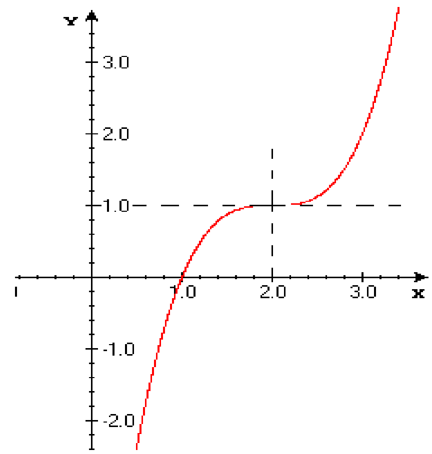
c) ___ f es monótona creciente en todo su dominio.

d) ___ f corta al eje y en el punto (0; -17).

e) ___ El dominio de f es un subconjunto del conjunto de los números racionales.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
Web of Sciece/Core Collection
Book Citation Index
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

9.2. El siguiente gráfico define una función del tipo $q_{(x)} = (x+d)^3 + e$ (d y e parámetros reales), entonces su ecuación es:



a) ___ $q_{(x)} = (x+2)^3 + 1$

b) ___ $q_{(x)} = (x+1)^3 + 2$

c) ___ $q_{(x)} = (x-1)^3 + 2$

d) ___ $q_{(x)} = (x-2)^3 + 1$

9.3. El conjunto para los cuales la función $f(x) = (2x^2 + 7x + 3)(x - 1)$ toma valores positivos es:

a)____ $(-3;-\frac{1}{2}) \cup (1,+\infty)$ b)____ $(-\infty;-3) \cup (-\frac{1}{2},1)$ c)____ $(-\infty,1)$ d)____ $(-\frac{1}{2},+\infty)$

9.4. Los valores reales positivos de x para los cuales la función $p_{(x)} = (x-7)^3 + 27$ es no positiva son:

a) ___ $\{x \in \Re : 0 > x > 4\}$ b) ___ $\{x \in \Re : x \leq 4\}$

c) ___ $\{x \in \Re : 0 < x \leq 4\}$ d) ___ $\{x \in \Re : x \geq 4\}$

9.5. El valor mínimo de la función definida por la ecuación $f_{(x)} = -(x+1)^3 + 3$ en el intervalo $[-2;1]$ es:

a) ___ -3 b) ___ 3 c) ___ -5 d) ___ 4

10. Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera en cada caso.

a) El dominio de la función $y = x^3 + 0{,}27$ es: ____________________

b) La imagen de la función definida por la ecuación $n_{(x)}(x-9)^3 + 3$ es : __________________

Book Citation Index
Web of Scіece/Core Collection
ETECAM Editorial Tecnocientífica Americana Estados Unidos de América
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

c) La función definida por la ecuación $y=-(x+8)^3$ tiene como cero: ___________________

d) El intercepto con el eje de ordenadas del gráfico de la función $f_{(x)}=(x+1)^3+0{,}8$ es: ____

e) Las coordenadas del punto de inflexión de la función definida por la ecuación $k_{(x)}=(x+6)^3+0{,}64$ es: _____________________

f) Toda función cúbica que cumpla la condición, que su gráfico sea simétrico respecto al origen de coordenadas, es una función: _____________________.

g) Toda función cúbica de la forma $t_{(x)}=a(x+d)^3+e$ (a, d y e parámetros reales) con $a>0$, es una función monótona _______________________.

h) Los valores del dominio para los cuales el gráfico de la función $g_{(x)}=-(x-1)^3+0{,}125$ está por encima del eje de las abscisas son: ___________________

i) Un ejemplo de una ecuación que defina una función cúbica que cumpla la condición de ser impar y monótona decreciente es: ___________________

j) De una función $h_{(x)}=(x+d)^3+1$ se sabe que corta al eje de las abscisas en $x=8$, entonces el valor del parámetro d es: _______________________

1.7. Inversa de una Función

- **Definición**

Si f es una función inyectiva con dominio A, e imagen B; entonces la función f^{-1} con domino B, e imagen A, se llama función inversa de f y se define por:

$f^{-1}{}_{(y)}=x$, si $f_{(x)}=y$, para toda $y\in B$

- **Ejemplos**

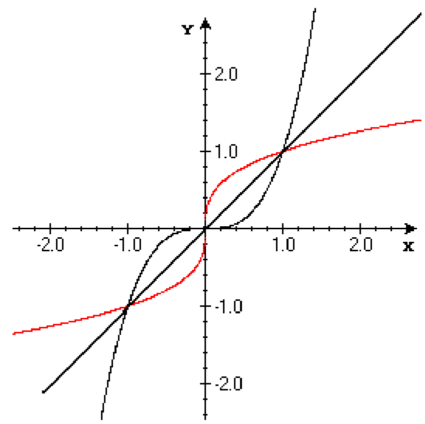
1. $y^{-1}=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\rightarrow$ inversa de $y=2x+3$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

2. $y^{-1} = \sqrt{x+2} - 1 \rightarrow$ inversa de $y = (x+1)^2 - 2(x \geq -1)$
3. $y^{-1} = \sqrt[3]{x+3} - 2 \rightarrow$ inversa de $y = (x+2)^3 - 3$
4. $y^{-1} = \dfrac{1}{x-5} - 4 \rightarrow$ inversa de $y = \dfrac{1}{x+4} + 5$
5. $y^{-1} = \log_2(x-7) + 6 \rightarrow$ inversa de $y = 2^{x-6} + 7$

- **Esbozo gráfico**

El gráfico de la función (f) y el gráfico de su inversa (f^{-1}) son simétricos respecto a la recta $y = x$.



- Algoritmo para determinar la inversa de una función
  1. Determinar si la función es inyectiva.
  2. Despejar a la variable x.
  3. Intercambiar variables.

Ejemplo: Determina, si existe, la función inversa de las siguientes funciones.

a) $f_{(x)} = 3x + 7$

b) $y = (x+5)^2$

c) $g_{(x)} = -\sqrt[3]{x-1} + 4$

Resolución:

a) $f_{(x)} = 3x + 7$

Retomando el algoritmo:

Primer paso: es analizar si la función es inyectiva.

Esta función, si analizas su monotonía, observarás que es monótona creciente estrictamente en todo su dominio, entonces es inyectiva, por tanto tiene inversa.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Segundo paso: Despejar a la variable x.

Como $f_{(x)} = 3x + 7$ entonces se puede decir que $f_{(x)} = y = 3x + 7$, luego la ecuación es $y = 3x + 7$.

Despejando a la variable x, se obtiene que:

$y = 3x + 7$, el 7 está sumando, se transpone restando.

$y - 7 = 3x$, el 3 que está multiplicando, se transpone dividiendo.

$\frac{y-7}{3} = x$, aquí se pude descomponer esta fracción en una resta de fracciones de denominadores comunes, en este caso 3.

$\frac{y}{3} - \frac{7}{3} = x$,

Es lo mismo que: $\frac{1}{3}y - \frac{7}{3} = x$, escribiéndola de la forma $y = mx + n$

Tercer paso: Intercambiar variables.

Luego, intercambiando variables, es decir donde está x sustituyo por y^{-1}, y donde está y sustituyo por x, se obtiene que:

$y^{-1} = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$. Analizando el nombre de la función dada, entonces la función inversa de f es: $f^{-1}_{(x)} = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$

b) $y = (x+5)^2$

Retomando el algoritmo:

Primer paso: es analizar si la función es inyectiva.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Esta función, si se analiza su monotonía, se puede concluir que tiene intervalos de crecimiento y decrecimiento, por lo que resulta que su monotonía no es única, luego no es inyectiva, por tanto no tiene inversa.

c) $g_{(x)} = -\sqrt[3]{x-1} + 4$

Retomando el algoritmo:

<u>*Primer paso:*</u> es analizar si la función es inyectiva.

Esta función, si analizas su monotonía, observarás que es monótona decreciente estrictamente en todo su dominio, entonces es inyectiva, por tanto tiene inversa.

<u>*Segundo paso:*</u> Despejar a la variable x.

Como $g_{(x)} = -\sqrt[3]{x-1} + 4$ entonces se pude decir que $g_{(x)} = y = -\sqrt[3]{x-1} + 4$ luego la ecuación es $y = -\sqrt[3]{x-1} + 4$.

Despejando a la variable x se obtiene que:

$y = -\sqrt[3]{x-1} + 4$, el 4 está sumando, se transpone restando.

$y - 4 = -\sqrt[3]{x-1}$, el signo negativo delante de la raíz, recordarás que es el valor de a, entonces es -1, está multiplicando, se transpone dividiendo o simplemente multiplicamos la ecuación por -1, ya que es lo mismo multiplicar que dividir por la unidad, luego $-1(y-4) = \sqrt[3]{x-1}$, se elevan ambos miembros al cubo:

$[-1(y-4)]^3 = x-1$, efectuando la potencia del miembro izquierdo

$(-1)^3(y-4)^3 = x-1$, luego $-(y-4)^3 = x-1$, el 1 que está restando se transpone sumando

$-(y-4)^3 + 1 = x$

<u>*Tercer paso:*</u> Intercambiar variables.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Luego se intercambian variables, es decir donde está x sustituyo por y^{-1}, y donde está y sustituyo por x, entonces se obtiene que:

$y^{-1} = -(x-4)^3 + 1$, como la función original se llama g, entonces la inversa es $f_{(x)}{}^{-1} = -(x-4)^3 + 1$.

Algunos elementos a tener en cuenta para analizar la función inversa:

- La función inversa, no siempre existe, y cuando existe, es única.
- En las funciones con más de una monotonía, para determinar su inversa, hay que restringir su dominio, para que esta sea estrictamente creciente o decreciente.
- El conjunto dominio (imagen) de una función inyectiva, es el conjunto imagen (dominio) de su inversa.
- Toda función biyectiva, tiene inversa.

Ejercicios del epígrafe

1. Determina, si existe, la ecuación de la función inversa de las siguientes funciones. Indica su dominio e imagen.

a) $f(x) = 5 - 2x$

b) $h(x) = |x + 6|$

c) $p_{(x)} = \sqrt{x+2}$

d) $g_{(x)} = \dfrac{1}{x+2} - 8$

e) $s_{(x)} = (x+2)^2; (x \geq -2)$

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

2. Determine el dominio, la imagen y los ceros de las funciones inversas de:

a) $y = 4x$

b) $f_{(x)} = x^2 - 7(x \geq 0)$

c) $y = (x-7)^3 - 1$

3. Realice el esbozo gráfico y determine las propiedades de la función inversa de $k_{(x)} = -\dfrac{1}{x-5} + 4$.

4. Halla, si existe, la ecuación de la función inversa de $h_{(x)} = (x-2)^3 - 1$

a) Determine dominio e imagen de h^{-1}.

b) ¿Es h^{-1} una función par? Justifique.

c) ¿Es h una función monótona creciente? Justifique.

5. Sea la función $t_{(x)} = -7x + 4{,}2$.

a) Determine t^{-1}.

b) ¿Es t^{-1} una función monótona creciente? Justifique.

c) Esboce ambas funciones en un mismo sistema de coordenadas.

d) Determine los valores de x, para los cuales, ambas funciones alcanzan el mismo valor.

6. Se tiene la función inyectiva definida por la ecuación $d_{(x)} = \dfrac{1}{x-5} + 9$.

a) Determine la función inversa de d.

b) Indique dominio e imagen de d^{-1}.

c) ¿Es d una función impar? Justifique.

7. Sea la función definida por $m_{(x)} = (x-7)^2 - 1(x \geq 7)$.

a) Determine la inversa de m.

b) Indique dominio e imagen de la inversa.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

c) Realice el esbozo gráfico de m.

8. Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a) ___ Toda función biyectiva, tiene inversa.

b) ___ El dominio de la función inversa de $y = \sqrt{x-2}$ es $x \in \Re$.

c) ___ Toda función tiene inversa.

d) ___ El gráfico de una función y el de su inversa, son iguales.

e) ___ El cero de la función inversa de $y = 4x$ es $x = 0$.

f) ___ Toda función de la forma $y = x^3$, tiene inversa.

g) ___ La imagen de la función y^{-1}, sabiendo que $y = \sqrt[5]{x-6}$ es $y \in \Re$.

h) ___ La inversa de la función $y = x$, es la propia recta.

i) ___ La inversa de la función $y = 9x^{-1}$, tiene como dominio $x \in \Re : x \neq 9$.

j) ___ La función inversa siempre existe.

9. Selecciona la respuesta correcta y marca con una *x* en la línea dada.

9.1. La ecuación de la función inversa, de la función definida por la ecuación $f_{(x)} = \sqrt{x-3} + 2$, en su dominio de definición es:

a) ___ $y = (x-2)^2 + 3$ b)___ $y = (x-4)^2 + 2$ c)___ $y = (x-3)^2 + 3$ d)___ $y = -(x-4)^2 + 2$

9.2. El dominio de definición de la función inversa de $y = 7(x-2)^3 + 2$ es:

a) ___ $(x \in \Re : x \neq 7)$ b) ___ $(x \in \Re : x > 7)$ c) ___ $(x \in \Re)$ d) ___ $(x \in \Re : x < 7)$

9.3. De una función y de su inversa se puede asegurar que:

a) ___ Sus ecuaciones definen el mismo tipo de función.

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

b) ___ Siempre sus gráficos tienen puntos comunes.

c) ___ Sus gráficos son simétricos, respecto a la recta $y = \pm x$.

d) ___ Sus ceros son iguales.

9.4. Sea la función $f_{(x)} = -1 + 4x$, entonces se puede afirmar que:

a) ___ f es inyectiva y monótona decreciente.

b) ___ f es sobreyectiva e impar.

c) ___ f es biyectiva y su inversa es $f_{(x)}^{-1} = 0{,}25x + \frac{1}{4}$.

d) ___ f no tiene ceros y es par.

9.5. De una función de proporcionalidad $g_{(x)} = \frac{1}{x+d} + e$, se conoce que su inversa tiene como punto característico el par ordenado $(-10;-7)$ y además es creciente, entonces se puede afirmar que:

a) ___ $g_{(x)} = \frac{1}{x+7} - 10$.

b) ___ g es inyectiva e impar.

c) ___ g es positiva en todo su dominio.

d) ___ El dominio de g es $\{x \in \Re : x \neq -7\}$ y su imagen es $\{y \in \Re : y \neq -10\}$.

10. Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera en cada caso.

a) Para que exista la función inversa, es suficiente y necesario que la función sea ________.

b) El gráfico de una función y el de su inversa son ____________ respecto a la recta _____.

c) La inversa de la función $y = 5x - 8$, es ___________________.

d) El dominio de la función inversa de $y = \frac{4}{x-5} + 6$, es: _____________________.

e) La función inversa de una función, no siempre existe, pero cuando existe es: __________.

f) El cero de la función inversa de $y = (x-5)^3$, es: _____________________.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

g) La función $y=|x+5|-2$ con $x \geq 5$ tiene como inversa: _______________.

h) Una ecuación de una función que admita una función inversa y que sea monótona creciente es: _________________________.

i) Un ejemplo de ecuación que define una función sobreyectiva, monótona creciente y que admita una inversa es: ________________________.

j) Un ejemplo de ecuación que define una función monótona decreciente, impar, con dominio en el conjunto de los números reales y que admita una inversa es: ____________________.

1.8. La Función Raíz Cuadrada

- **Definición**

La correspondencia que a cada $x \in \Re$ se le hace corresponder el número real $f_{(x)} = a\sqrt{x+d}+e; (a \neq o; x \geq -d)$, donde a, d y e son números reales dados, se denomina función raíz cuadrada.

- **Ejemplos**

1. $y = \sqrt{x+2} - 1 \rightarrow (a = 1; d = 2; e = -1)$

2. $y = -\sqrt{x+3} - 2 \rightarrow (a = -1; d = 3; e = -2)$

3. $y = 2\sqrt{x+5} - 4 \rightarrow (a = 2; d = 5; e = -4)$

4. $y = \sqrt{x} + 4 \rightarrow (a = 1; d = 0; e = 4)$

5. $y = \sqrt{x+7} \rightarrow (a = 1; d = 7; e = 0)$

- **Esbozo gráfico**

Esta función es la función inversa de la función cuadrática, en general el esbozo gráfico de esta función del tipo $f_{(x)} = a\sqrt{x+d}+e; (a \neq o; x \geq -d)$ es una curva que tiene su dominio e imagen restringida, donde el punto de coordenadas $(-d; e)$ recibe el nombre de punto característico y es hasta donde se traslada el origen de la función.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Algunos elementos a tener en cuenta para analizar la función raíz cuadrada:

- Si $-1 < a < 1; a \neq 0$, la función se contrae, y si $-1 > a > 1$, entonces la función se dilata (respecto al eje *x*).
- Si $a > 0$, la función es creciente.
- Si $a < 0$, la función es decreciente.
- Esta función tiene su dominio e imagen acotados en uno de sus extremos.

Ejemplo resuelto

Sea la función m definida en $\Re$ por la ecuación $m_{(x)} = \sqrt{x+3} - 2$.

a) Realice su esbozo gráfico.

b) Determine:

- Dominio
- Imagen
- Ceros
- Monotonía
- Paridad
- Valor Máximo
- Valor Mínimo
- Intercepto con eje de ordenadas
- Signo

c) Clasifíquela en inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024
Book Citation Index
Web of Sciece/Core Collection

Respuesta

a) Para realizar este esbozo gráfico se tomará el punto característico, los ceros (en caso de que tenga), el intercepto con el eje de ordenadas (en caso de que tenga), y algunos puntos que pertenezcan a la función.

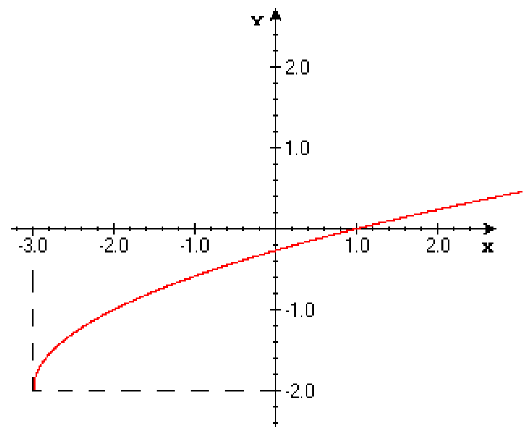
Punto característico: esta función tiene la forma $m_{(x)} = a\sqrt{x+d} + e; \left(a \neq o; x \geq -d\right)$, donde el punto característico tiene coordenadas $\left(-3;-2\right)$.

Calculando el intercepto con el eje de ordenas, que se calcula evaluando la función para $x = 0$, se obtiene que el valor es $y = -0{,}27$.

Calculando los ceros, que se determinan igualando la ecuación a cero, se obtiene que es: $x_0 = 1$.

Determinando el ploteo de puntos:

x	-2	-1	1	2
y	-1	-0.59	0	4.24



Representando en el sistema de coordenadas el punto característico, el cero, el intercepto con el eje de las ordenadas y los puntos calculados en el ploteo, se obtiene el esbozo gráfico mostrado en la figura.

b) Propiedades

- Dominio

Si analizas las operaciones que aparecen en su ecuación, observarás que la única que se indefine en el conjunto de los números reales es la radicación de índice par, luego el radicando tiene que ser mayor o igual que cero, es decir $x + 3 \geq 0$, al resolver esta inecuación se obtiene que el dominio de esta función es $x \in \Re : x \geq -3$. En el gráfico observarás claramente que este está desde $x = -3$ hacia la derecha.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

- Imagen

En el gráfico observarás claramente que este aparece desde $y = -2$ hacia arriba, luego la imagen es $y \in \Re : y \geq -2$

- Ceros

Ya se calculó para el esbozo gráfico que es: $x_0 = 1$

- Monotonía

Esta función, al analizar su esbozo gráfico de izquierda a derecha, observarás que es monótona creciente en todo su dominio, además $a > 0$.

- Paridad

Recuerda que debes analizar si es par o impar:

Para que sea par debe cumplirse que $m_{(x)} = m_{(-x)}$ y al calcular no se cumple ya que: $\sqrt{x+3} - 2 \neq \sqrt{-x+3} - 2$, luego la función no es par, además su gráfico no es simétrico respecto al eje de las ordenadas.

Para que sea impar debe cumplirse que $m_{(x)} = -m_{(-x)}$, y al calcular no se cumple, ya que $\sqrt{x+3} - 2 \neq -\sqrt{-x+3} + 2$, luego la función no es impar, además su gráfico no es simétrico respecto al origen de coordenadas.

A modo de conclusión, esta función no es par ni impar.

- Valor Máximo

Si te percatas esta función no tiene valor máximo.

- Valor Mínimo

Al observar el gráfico de dicha función observarás que sí tiene valor mínimo, que es $y = -2$ en $x = -3$.

- Eje de simetría

Esta función no tiene eje de simetría.

- Intercepto con eje de ordenadas

Ya se calculó el intercepto con este eje para el esbozo gráfico que es el valor $y = -0{,}27$.

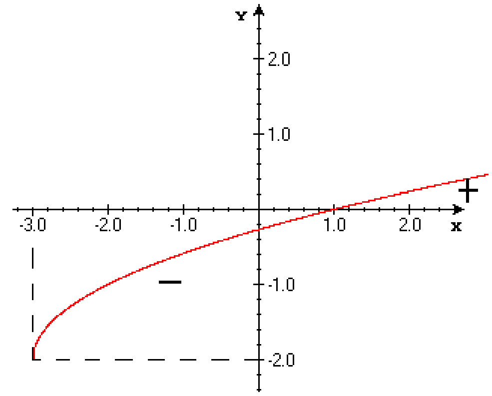
Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

- Signo

Para el signo, basta con analizar el eje de las abscisas, utilizando los ceros y ubicar los signos correspondientes, recuerda que lo que se hace es resolver una inecuación con radicales, obteniéndose el esbozo gráfico de la figura, luego el signo de esta función es:

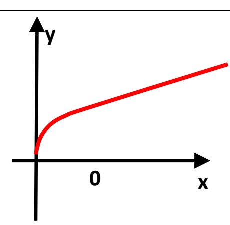
Positiva: $\{x \in \Re : x > 1\}$

Negativa: $\{x \in \Re : -3 \leq x < 1\}$

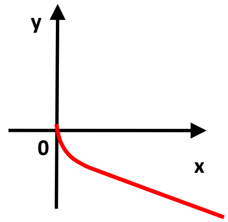
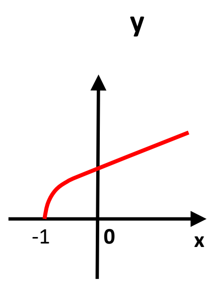
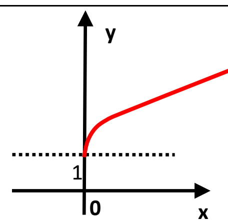


c) Esta función es inyectiva, recuerda que para que lo sea, la función debe ser estrictamente creciente o decreciente, y esta es creciente. Otra forma para demostrar que es inyectiva es la prueba de la recta paralela al eje de las abscisas, si lo verificas observarás que la corta en un punto.
Analiza entonces que esta función no tiene imagen plena, por lo que no es sobreyectiva.
Luego la función no es biyectiva.

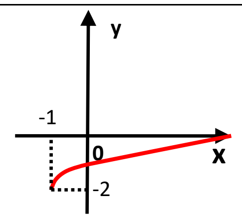
A continuación, se ofrece un cuadro resumen con las distintas maneras en que puede aparecer expresada una función raíz cuadrada, su esbozo gráfico y algunas de sus propiedades principales.

Ecuac.	Ejem.	Despla	Esbozo gráfico	Dom	Imag	Ceros	Monot	Parid.	I. Ord	Signo
$y=\sqrt{x}$	$y=\sqrt{x}$	$x=0$ $y=0$ $(0;0)$		$x \in \Re :$ $x \geq 0$	$y \in \Re :$ $y \geq 0$	$x=0$	M.C	No es par ni impar	$y=0$	No negativa

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
Book Citation Index
Web of Sciece/Core Collection
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

	$y = -\sqrt{x}$	$x = 0$ $y = 0$ $(0;0)$		$x \in \Re:$ $x \geq 0$	$y \in \Re:$ $y \leq 0$	$x = 0$	M.D	No es par ni impar	$y = 0$	No positiva
$y = \sqrt{x + a}$	$y = \sqrt{x + 1}$	$x = -1$ $y = 0$ $(-1;0)$		$x \in \Re:$ $x \geq -1$	$y \in \Re:$ $y \geq 0$	$x = -1$	M.C	No es par ni impar	$y = 1$	posit. $x > -1$
$y = \sqrt{x} + e$	$y = \sqrt{x} + 1$	$x = 0$ $y = 1$ $(0;1)$		$x \in \Re:$ $x \geq 0$	$y \in \Re:$ $y \geq 1$	-----	M.C	No es par ni impar	$y = 1$	posit. $x > 0$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

$y=\sqrt{x+d}+e$	$y=\sqrt{x+1}-2$	$x=-1$ $y=-2$ $(-1;-2)$		$x\in\Re:$ $x\geq -1$	$y\in\Re:$ $y\geq -2$	$x=3$	M.C	No es par ni impar	$y=-1$	negat. $-1<x<3$ posit. $x>3$

Ejercicios del epígrafe

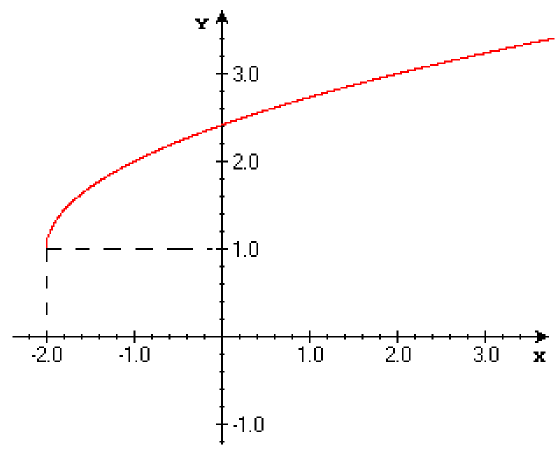
1. Sea la función $t_{(x)}=\sqrt{x-5}+4$. Determine:

a) Dominio e imagen.
b) Interceptos con ejes coordenados.
c) Valor mínimo y monotonía.

2. Dada la función definida por la ecuación $k_{(x)}=\sqrt{x+4}-5$

a) Realice su esbozo gráfico.
b) Determine: dominio, imagen, ceros y monotonía.
c) ¿Es k una función impar? Justifique.

3. Dado el siguiente esbozo gráfico de una función de la forma $y=\sqrt{x+d}+e$.



a) Escriba su ecuación.
b) Indique dominio e imagen.
c) ¿Es esta función monótona creciente? Justifique.
d) Verifica si el par ordenado $(-2;7)$ pertenece a la función.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

4. Se tiene la función definida por la ecuación $p_{(x)} = \sqrt{x-1} + 7$.

a) Determine dominio, imagen y ceros.
b) ¿Es p una función inyectiva? ¿Por qué?
c) Determine el dominio de la función para la ordenada: $-1{,}5$.

5. Dada la función $f_{(x)} = -\sqrt{x+7} - 2$.

a) Esboce su gráfico.
b) Indique dominio, imagen, ceros y paridad.
c) ¿Es f una función monótona creciente? Justifique.
d) ¿Es f una función inyectiva? Justifique.

6. De una función de la forma $y = \sqrt{x+d} - 4$, se sabe que el punto $(-1;3)$ pertenece a su gráfico.

a) Escriba su ecuación.
b) Determine dominio e imagen.
c) ¿Es esta función impar? Justifique.

7. De una función de la forma $y = \sqrt{x+d} + e$, se sabe que: $q_{(0)} = 1$ y $q_{(-2)} = 0$.

a) Escriba la ecuación de q.
b) Esboce su gráfico.
c) Determine los valores de x para los cuales la función es no negativa.
d) Se puede afirmar que q es una función inyectiva y monótona creciente. ¿Por qué?

8. Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a) ___ El dominio de la función h, con $h_{(x)} = \sqrt{x}$ es $\{x : x \in IR\}$.
b) ___ La función f definida en $\{x \in \Re : x \geq -2\}$, por la ecuación $f_{(x)} = \sqrt{x+2} - 1$, es positiva en todo su dominio.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
Book Citation Index
Web of Sciece/Core Collection
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

c) ___ La función de variable real f de ecuación $f(x)=\sqrt{x-1}$, tiene como imagen al conjunto de los números reales mayores o iguales que cero.

d) ___ El dominio de la función t, con $t_{(x)}=\sqrt{x}+3$ es $\{x: x \in \Re_{+}\}$.

e) ___ La función definida en un subconjunto de $\Re$ por la ecuación $y=\sqrt{x-8}$ no tiene ceros.

f) ___ La función definida en un subconjunto de $\Re$ por la ecuación $y=-\sqrt{x-7}-1$, es inyectiva y creciente.

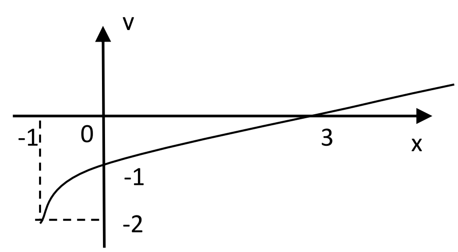
g) ___ La función definida por la ecuación $y=-\sqrt{x}$, con $x \in \Re: x \geq 0$ es impar.

h) ___ El gráfico de la función $y=\sqrt{x}-1$, no corta al eje de las ordenadas.

i) ___ La función definida por la ecuación $y=\sqrt{x-9}+1$, con $x \in \Re: x \geq 9$ es positiva en todo su dominio.

j) ___ La función $y=\sqrt{x-8}-7$, alcanza su valor mínimo en $y=-7$ para $x=8$.

9. Selecciona la respuesta correcta y marca con una *x* en la línea dada.



9.1. Si el gráfico que se muestra corresponde a una función f cuya ecuación tiene la forma $f_{(x)}=\sqrt{x+a}+b$, entonces los valores de a y b son:

a) __ $a=-1$ y $b=-2$ b) __ $a=-1$ y $b=2$

c) __ $a=1$ y $b=-2$ d) __ $a=1$ y $b=2$

9.2. El dominio de la función de ecuación, $y=\sqrt{x+4}+1$ es:

a) ___ $\{x \in \Re : x > -4\}$ c) ___ $\{x \in \Re : x \geq -4\}$

b) ___ $\{x \in \Re : x \geq 1\}$ d) ___ $\{x \in \Re : x \leq -4\}$

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

9.3. La función definida por la ecuación $g_{(x)} = \sqrt{x-2}+3$ tiene por imagen el conjunto:

a) ___ $\{y \in \Re : y \geq -3\}$ b) ___ $\{y \in \Re : y < 3\}$ c) ___ $\{y \in \Re : y \geq 3\}$ d) __ $\{y \in \Re : y > 3\}$

9.4. La función definida por la ecuación $h_{(x)} = \sqrt{x+4}+1$, es no negativa para:

a) __ $x \in \Re : x \geq -3$ b) __ $x \in \Re : x \leq -3$ c) __ $x \in \Re : x > -3$ d) __ $x \in \Re$

9.5. Dada la función definida por la ecuación $h_{(x)} = \sqrt{x+6}-2$, se puede afirmar que:

a) ___ h es monótona creciente e impar.
b) ___ h es inyectiva con imagen $y \in \Re$.
c) ___ $Domh = \{x \in \Re : x \geq -6\}$ y no es par ni impar.
d) ___ h es monótona decreciente y no tiene ceros.

10. Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera en cada caso.

a) El dominio de definición de la ecuación $y = \sqrt{x-2}+4$ es: ______.
b) La imagen de la función definida por la ecuación $y = \sqrt{x-1}+5$ es: __________________.
c) La función definida en un subconjunto de los $\Re$, por la ecuación $y = \sqrt{x-7}+9$ corta al eje de ordenadas en: _______________.
d) El valor mínimo de la función definida por la ecuación $y = \sqrt{x-11}+2{,}7$, es: ____________.
e) La función $y = \sqrt{x-8}+12$, es monótona _______________________.
f) La imagen de la función $y = -\sqrt{x+3}-7$ en el punto de abscisa $x = 6$, tiene como dominio numérico más restringido al conjunto de los números: _______________________.
g) Sea la función definida por la ecuación $y = \sqrt{x+1}-2; (x \geq -1)$. El intervalo donde la función es negativa es: _______________________.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
Book Citation Index
Web of Sciece/Core Collection
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

h) Un ejemplo de una ecuación que define una función raíz cuadrada que sea monótona creciente y tenga ceros, es: _______________________

i) La inversa de la función definida por la ecuación $k_{(x)} = \sqrt{x+15} - 9; (x \geq -15)$, es: _________.

1.9. La Función Raíz Cúbica

- **Definición**

La correspondencia que a cada $x \in \Re$ se le hace corresponder el número real $f_{(x)} = a\sqrt[3]{x+d} + e; (a \neq 0)$, donde a, d y e, son números reales dados, se denomina función raíz cúbica.

- **Ejemplos**

1. $y = \sqrt[3]{x-1} - 4 \rightarrow (a = 1; d = -1; e = -4)$
2. $y = -\sqrt[3]{x-2} + 5 \rightarrow (a = 1; d = -2; e = 5)$
3. $y = 4\sqrt[3]{x+3} - 1 \rightarrow (a = 4; d = 3; e = -1)$
4. $y = \sqrt[3]{x} + 8 \rightarrow (a = 1; d = 0; e = 8)$
5. $y = \sqrt[3]{x-5} \rightarrow (a = 1; d = -5; e = 0)$

- **Esbozo gráfico**

Esta función es la función inversa de la función cúbica, por lo que el esbozo gráfico de una función del tipo $f_{(x)} = a\sqrt[3]{x+d} + e; (a \neq 0)$ es una curva, donde el punto de coordenadas $(-d; e)$ recibe el nombre de punto de inflexión y es hasta donde se traslada el origen de dicha función.

Algunos elementos a tener en cuenta para analizar la función cúbica:

- Si $-1 < a < 1$, la función se contrae y si $-1 > a > 1$, entonces la función se dilata (respecto al eje *x*).
- Si $a > 0$, la función es monótona creciente.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

- Si $a < 0$, la función es monótona decreciente.

Ejemplo resuelto

Sea la función p definida en $\Re$ por la ecuación $p_{(x)} = \sqrt[3]{x-2} - 1$.

a) Realice su esbozo gráfico.

b) Determine:

- Dominio
- Imagen
- Ceros
- Monotonía
- Paridad
- Valor Máximo
- Valor Mínimo
- Eje de simetría
- Intercepto con eje de ordenadas
- Signo

c) Clasifíquela en inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

<u>*Respuesta*</u>

a) Para realizar este esbozo gráfico se tomará el punto característico (punto de inflexión), los ceros (en caso de que tenga), el intercepto con el eje de ordenadas (en caso de que tenga), y algunos puntos que pertenezcan a la función.

Punto de inflexión: esta función tiene la forma $p_{(x)} = a\sqrt[3]{x+d} + e; (a \neq o; x \geq -d)$, donde el punto característico (punto de inflexión) tiene coordenadas $(2;-1)$.

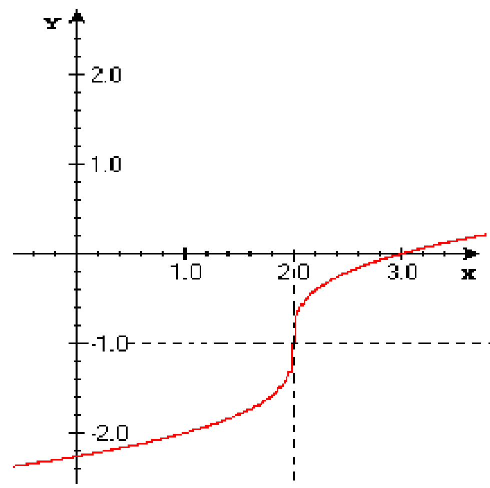
Calculando el intercepto con el eje de ordenas, que se calcula evaluando la función para $x = 0$, se obtiene que el valor es $y = -2,26$.

Calculando los ceros, que se determinan igualando la ecuación a cero, se obtiene que es: $x_0 = 3$.

Determinando el ploteo de puntos:

x	-1	1	3	4
y	-2.4	-2	0	-2.3

Representando en el sistema de coordenadas el punto de inflexión, el cero, el intercepto con el eje de las ordenadas y los puntos calculados en el ploteo, se obtiene el esbozo gráfico mostrado en la figura.



b) Propiedades

- Dominio

Si analizas las operaciones que aparecen en su ecuación, observarás que ninguna se indefine en el conjunto de los números reales, por lo que el dominio de esta función es $x \in \Re$. En el gráfico observarás claramente que este abarca todo el eje de las abscisas.

- Imagen

En el gráfico observarás claramente que este abarca todo el eje de las ordenadas, es decir, tiene imagen plena, luego la imagen es $y \in \Re$

- Ceros

Ya se calculó para el esbozo gráfico que es: $x_0 = 3$

Tratamiento didáctico a las funciones elementales en la enseñanza de las matemáticas
Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

- Monotonía

En esta función al analizar su esbozo gráfico de izquierda a derecha, observarás que es monótona creciente en todo su dominio, además $a > 0$.

- Paridad

Recuerda que debes analizar si es par o impar:

Para que sea par, debe cumplirse que $p_{(x)} = p_{(-x)}$ y al calcular no se cumple ya que, $\sqrt[3]{x-2} - 1 \neq \sqrt[3]{-x-2} - 1$, luego la función no es par, además su gráfico no es simétrico respecto al eje de las ordenadas.

Para que sea impar, debe cumplirse que $p_{(x)} = -p_{(-x)}$ y al calcular no se cumple ya que, $\sqrt[3]{x-2} - 1 \neq -\sqrt[3]{-x-2} + 1$, luego la función no es impar, además su gráfico no es simétrico respecto al origen de coordenadas.

A modo de conclusión, esta función no es par ni impar.

- Valor Máximo

Si te percatas, esta función no tiene valor máximo.

- Valor Mínimo

Si te percatas, esta función no tiene valor máximo.

- Eje de simetría

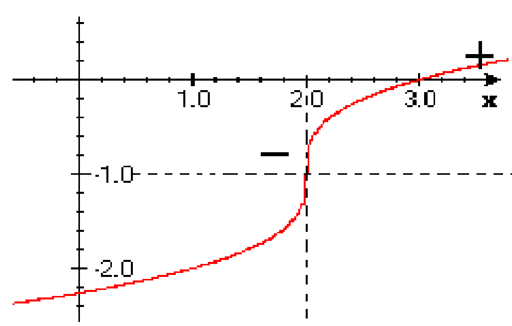
Esta función no tiene eje de simetría.

- Intercepto con eje de ordenadas

Ya se calculó el intercepto con este eje para el esbozo gráfico que es el valor $y = -2{,}26$.

- Signo

Para el signo, basta con analizar el eje de las abscisas, utilizando los ceros y ubicar los signos correspondientes, recuerda que lo que se hace es resolver una inecuación con radicales, obteniéndose el esbozo gráfico de la figura, luego el signo de esta función es:



Positiva: $\{x \in \Re : x > 3\}$

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

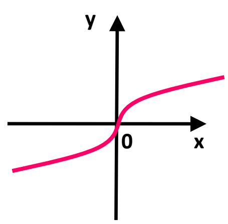
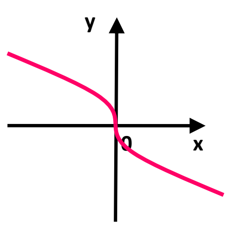
Negativa: $\{x \in \Re : x < 3\}$

c) Esta función es inyectiva, recuerda que para que sea inyectiva, la función debe ser estrictamente creciente o decreciente, y esta es creciente. Otra forma para demostrar que es inyectiva es la prueba de la recta paralela al eje de las abscisas, si lo verificas observarás que la corta en un punto.

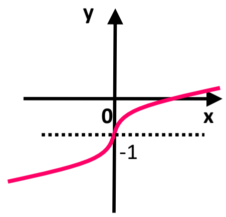
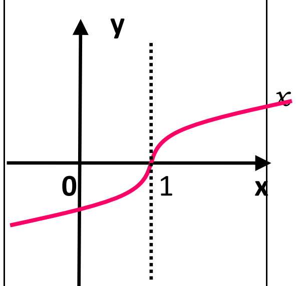
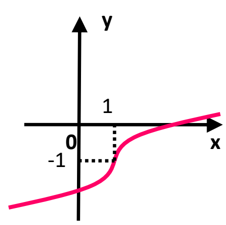
Analiza entonces que esta función tiene imagen plena, por lo que es sobreyectiva.

Luego la función es biyectiva.

A continuación, se ofrece un cuadro resumen con las distintas maneras en que puede aparecer expresada una función raíz cúbica, su esbozo gráfico y algunas de sus propiedades principales

Ecuac.	Ejemplo	Despla	Esbozo gráfico	Dom	Imag	Ceros	Monot	Parid	I. Ord	Signo
$y = \sqrt[3]{x}$	$y = \sqrt[3]{x}$	$x = 0$ $y = 0$ (0;0)		$x \in \Re$	$y \in \Re$	$x = 0$	M.C	Impar	$y = 0$	negat. $x<0$ posit. $x>0$
	$y = -\sqrt[3]{x}$	$x = 0$ $y = 0$ (0;0)		$x \in \Re$	$y \in \Re$	$x = 0$	M.D	Impar	$y = 0$	negat. $x>0$ posit. $x<0$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

$y = \sqrt[3]{x} + e$	$y = \sqrt[3]{x} - 1$	$x = 0$ $y = -1$ $(0;-1)$		$x \in \Re$	$y \in \Re$	$x = 1$	M.C	No es par ni impar	$y = -1$	negat. $x<1$ posit. $x>1$
$y = \sqrt[3]{x + d}$	$y = \sqrt[3]{x - 1}$	$x = 1$ $y = 0$ $(1;0)$		$x \in \Re$	$y \in \Re$	$x = 1$	M.C	No es par ni impar	$y = -1$	negat. $x<1$ posit. $x>1$
$y = \sqrt[3]{x + d} + e$	$y = \sqrt[3]{x - 1} - 1$	$x = 1$ $y = -1$ $(1;-1)$		$x \in \Re$	$y \in \Re$	$x = 2$	M.C	No es par ni impar	$y = -2$	negat. $x<2$ posit. $x>2$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Ejercicios del epígrafe

1. Realiza el esbozo gráfico y determina las propiedades de las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt[3]{x-1}$

b) $y=\sqrt[3]{x-9}+0{,}27$

c) $y=-\sqrt[3]{x}-8$

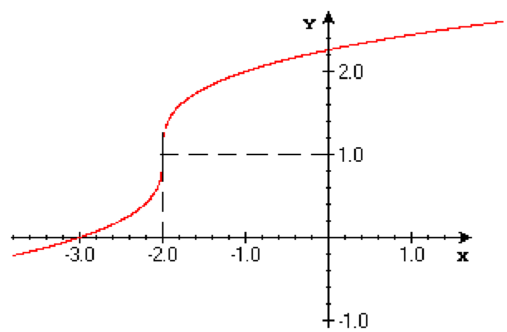
2. Sea la función definida por la ecuación $d_{(x)}=\sqrt[3]{x+9}-5$.

a) Indique dominio, imagen y monotonía.

b) ¿Es d una función impar? Justifica.

c) Calcule los valores donde el gráfico de d corta a los ejes coordenados.

3. Dado el siguiente esbozo gráfico, correspondiente a una función del tipo $h_{(x)}=\sqrt[3]{x+d}+e$.



a) Escriba su ecuación.

b) Determine monotonía y ceros.

c) ¿En qué intervalo la función es no negativa?

4. Se sabe que el gráfico de la función definida por la ecuación $k_{(x)}=\sqrt[3]{x+d}-27$ pasa por el punto de coordenadas $(6;-19)$.

a) Escriba la ecuación de k.

b) Esboce su gráfico.

c) Determine dominio, imagen, monotonía y paridad.

d) ¿Para qué valores del dominio, la función h es no positiva?

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

5. Sea la función definida por la ecuación $g_{(x)} = \sqrt[3]{x+2} - \frac{1}{27}$.

a) Determine las coordenadas de su punto de inflexión.

b) ¿Es g una función impar? Justifique.

c) ¿Es g una función monótona decreciente? Justifique su respuesta.

d) Determine los valores del dominio para los cuales la función está por encima del eje de las abscisas.

6. De una función del tipo $f_{(x)} = \sqrt[3]{x+d} + e$, se sabe que, $f_{(0)} = 2$ y $f_{(-3)} = 0$.

a) Escriba la ecuación de f.

b) Determine dominio, monotonía y paridad.

c) Determine un intervalo donde la función sea positiva.

d) Determine, si existe, la inversa de f.

7. Dada la función $h_{(x)} = -\sqrt[3]{x-1}$.

a) Determine si el par ordenado $(2;1) \in h$.

b) Calcule sus ceros.

c) Esboce el gráfico de h en el intervalo $[-2;9[$.

d) ¿Cuál es la imagen del esbozo gráfico?

8. Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a) ___ El dominio de la función $y = 7\sqrt[3]{x-1} - 3{,}27$ es $x \in \Re$.

b) ___ La función definida en $\Re$ por la ecuación $h_{(x)} = \sqrt[3]{x+7}$, no tiene ceros.

c) ___ La función definida por la ecuación $y = \sqrt[3]{x+9} - 17$, no admite una función inversa.

d) ___ La ordenada de la función $p_{(x)} = 0{,}2\sqrt[3]{x-8}$ en el punto de abscisa $x = 7{,}9$ es un número fraccionario.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

e) ___ La imagen de la función definida en $\Re$ por la ecuación $y=-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x-0{,}24}-2\frac{1}{3}$ es $\left\{y\in\Re : y\le -2\frac{1}{3}\right\}$.

f) ___ El punto de inflexión de la función definida por la ecuación $y=\sqrt[3]{x-1}+5$ es $P(-1;5)$.

g) ___ La función $y=-5\sqrt[3]{x-0{,}125}-1{,}5$ no corta el eje de las ordenadas.

h) ___ Toda función de la forma $y=a\sqrt[3]{x+d}+e$, con $(a<0)$, es una función monótona creciente en todo su dominio.

i) ___ Toda función de la forma $y=a\sqrt[3]{x+d}+e$ con $(a\ne 0; d=0; e=0)$, es una función impar.

j) ___ La función definida en $\Re$ por la ecuación $t_{(x)}=\sqrt[3]{x-1}+4$, es positiva para las $(x\in\Re : x\le -63)$.

9. Selecciona la respuesta correcta y marca con una *x* en la línea dada.

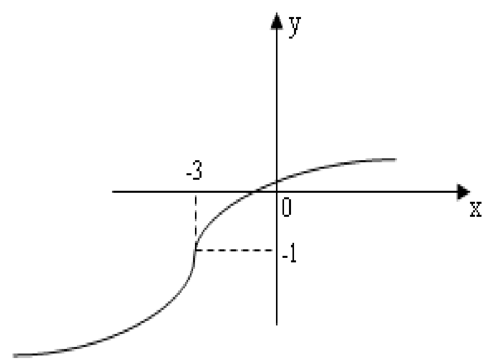
9.1. Si el gráfico corresponde a una función cuya ecuación tiene la forma $h_{(x)}=\sqrt[3]{x+b}+c$, entonces su ecuación es:

a) ___ $h_{(x)}=\sqrt[3]{x+3}+1$

b) ___ $h_{(x)}=\sqrt[3]{x+3}-1$

c) ___ $h_{(x)}=\sqrt[3]{x-3}+1$

d) ___ $h_{(x)}=\sqrt[3]{x-3}-1$



9.2. Dada la función definida en $\Re$ por la ecuación $f_{(x)}=\sqrt[3]{x-1}-4$.

a) Realice su esbozo gráfico.

b) Indique su monotonía y su paridad.

c) ¿Es f una función biyectiva? Justifique.

d) Determine, en caso que exista, su inversa.

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

9.3. Se tiene la función $y = -\sqrt[3]{x+d} - 2$, de la cual se sabe que el punto $A(2;4)$ le pertenece.

a) Escriba su ecuación.
b) Realice su esbozo gráfico.
c) Calcule los interceptos con los ejes coordenados.
d) Determine un intervalo donde la función sea negativa.

9.4. Sea la función $k_{(x)} = -\sqrt[3]{x-3} - 0{,}5$.

a) Determine las coordenadas del punto de inflexión.
b) Calcule $k_{(11)}$ y $k_{(2,73)}$.
c) Determine los valores racionales; para los cuales k es negativa.

9.5. Sean las funciones definidas por $f_{(x)} = \sqrt[3]{x-1} + 27$ y $g_{(x)} = -3\sqrt[3]{x-1} + 25$

a) Determine dominio y monotonía de ambas funciones.
b) Calcule los ceros de f.
c) Determine los valores reales para los que el gráfico de f está por encima del gráfico de g.
d) Esboce el gráfico de f en el intervalo $[2;11[$.

10. Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera en cada caso.

a) La imagen de la función definida por la ecuación $f_{(x)} = \sqrt[3]{x} + 9$ es: ____________________.
b) El cero de la función definida por la ecuación $g_{(x)} = 5\sqrt[3]{x-11} + 25$, es un número ________.
c) La función definida en $\Re$ por la ecuación $h_{(x)} = 7\sqrt[3]{x+6} + 4$ es monótona ______________.
d) La función definida por la ecuación $p_{(x)} = \sqrt[3]{x+7}$ es no negativa para: ________________.

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

e) La imagen de la función definida por la ecuación $q_{(x)} = 6\sqrt[3]{x-1} + 2{,}1$ en el punto de abscisa $x = -7$, es un número ___________________________.

f) La función definida por la ecuación $y = \sqrt[3]{x} + 3{,}8$, corta al eje de las ordenadas en: ______.

g) El punto de inflexión de la función $t_{(x)} = -2{,}7\sqrt[3]{x+8} - 9$, tiene como coordenadas: ________.

h) Un ejemplo de ecuación que defina la función de raíz cúbica y cumpla la condición de ser impar y monótona decreciente es: _______________________.

i) La inversa de la función definida por la ecuación $m_{(x)} = -\sqrt[3]{x+9} - 7$ es: _________________.

j) Los valores reales de x para los cuales el gráfico de la función $y = \sqrt[3]{x+2} + 8$, está por encima de la ordenada 16 es: ________________________.

1.10. La Función Exponencial

- **Definición**

La correspondencia que a cada $x \in \Re$ se le hace corresponder el número real $f_{(x)} = a^{x+d} + e(a > 0, a \neq 1)$, donde a, d y e son números reales dados, se denomina función exponencial.

- **Ejemplos**

1. $y = 5^x \rightarrow (a = 5; d = 0; e = 0)$

2. $y = 2^{x+5} - 3 \rightarrow (a = 2; d = 5; e = -3)$

3. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-7} + 4 \rightarrow (a = \frac{1}{3}; d = -7; e = 4)$

4. $y = 3^x - 2 \rightarrow (a = 3; d = 0; e = -2)$

5. $y = (0{,}7)^{x-2} \rightarrow (a = 0{,}7; d = -2; e = 0)$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

- **Esbozo gráfico**

En general el esbozo gráfico de una función del tipo $f_{(x)} = a^{x+d} + e(a > 0, a \neq 1)$ es una curva, donde el punto de coordenadas $(-d; e+1)$ recibe el nombre de punto característico y es hasta donde se traslada el origen de la función y tiene una asíntota horizontal que es la recta $y = e$.

Algunos elementos a tener en cuenta para analizar la función exponencial:

- Si $0 < a < 1$, la función es monótona decreciente.
- Si $a > 1$, la función es monótona creciente.
- La función exponencial no es par ni impar.
- La función exponencial no tiene valor máximo ni valor mínimo.
- La definición de función exponencial exige que la base sea siempre positiva y diferente de uno $(a > 0; a \neq 1)$. La condición que $a \neq 1$ se impone, debido a que al evaluar en la ecuación por 1, la función se transforma en la función constante $f_{(x)} = 1$. La base no puede ser negativa porque las funciones de la forma $f_{(-2)} = (-2)^{\frac{1}{2}}$ no tienen sentido en los números reales.

Ejemplo resuelto

Sea la función f definida en $\Re$ por la ecuación $f_{(x)} = 2^{x+1} - 2$.

a) Realice su esbozo gráfico.
b) Determine:

- Dominio
- Imagen
- Ceros
- Monotonía
- Paridad
- Asíntota
- Valor Máximo
- Valor Mínimo
- Eje de simetría
- Intercepto con eje de ordenadas
- Signo

Book Citation Index
Web of Sciece/Core Collection
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

c) Clasifíquela en inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

Respuesta

a) Para realizar este esbozo gráfico se tomará el punto característico, los ceros (en caso de que tenga), el intercepto con el eje de ordenadas (en caso de que tenga), y algunos puntos que pertenezcan a la función.

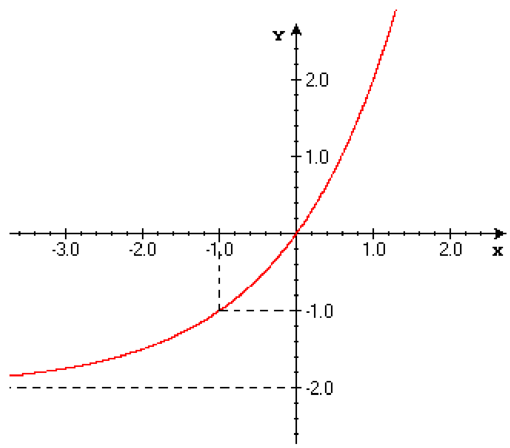
Punto caracretístico: esta función tiene la forma $f_{(x)} = a^{x+d} + e(a > 0, a \neq 1)$, donde el punto característico $(-d; e+1)$ tiene coordenadas $(-1;-1)$.

Calculando el intercepto con el eje de ordenas, que se calcula evaluando la función para $x = 0$, se obtiene que el valor es $y = 0$.

Calculando los ceros, que se determina igualando la ecuación a cero, se obtiene que es: $x_0 = 0$.

Determinando el ploteo de puntos:

x	-3	-2	-1	1	2
y	-1.75	-1.5	-1	2	6



Representando en el sistema de coordenadas el punto característico, el cero, el intercepto con el eje de las ordenadas y los puntos calculados en el ploteo, se obtiene el esbozo gráfico mostrado en la figura.

b) Propiedades

- Dominio

Si analizas las operaciones que aparecen en su ecuación, observarás que ninguna se indefine en el conjunto de los números reales, por lo que el dominio de esta función es $x \in \Re$. En el gráfico observarás claramente que abarca todo el eje de las abscisas.

- Imagen

En el gráfico observarás claramente que este está definido para las $y > -2$, luego la imagen es $y \in \Re : y > -2$

Tratamiento didáctico a las funciones elementales en la enseñanza de las matemáticas
Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

- Ceros

Ya se calculó para el esbozo gráfico que es: $x_0 = 0$

- Monotonía

Esta función al analizar su esbozo gráfico de izquierda a derecha, observarás que es monótona creciente en todo su dominio, además $a > 1$.

- Paridad

Recuerda que debes analizar si es par o impar:

Para que sea par debe cumplirse que $f_{(x)} = f_{(-x)}$ y al calcular no se cumple ya que: $2^{x+1} - 2 \neq 2^{-x+1} - 2$, luego la función no es par, además su gráfico no es simétrico respecto al eje de las ordenadas.

Para que sea impar debe cumplirse que, $f_{(x)} = -f_{(-x)}$, y al calcular no se cumple ya que $2^{x+1} - 2 \neq -2^{-x+1} + 2$, luego la función no es impar, además su gráfico no es simétrico respecto al origen de las coordenadas.

A modo de conclusión, esta función no es par ni impar.

- Asíntota

Esta función tiene una asíntota horizontal en $y = -2$.

- Valor Máximo

Si te percatas esta función no tiene valor máximo.

- Valor Mínimo

Si te percatas esta función no tiene valor máximo.

- Eje de simetría

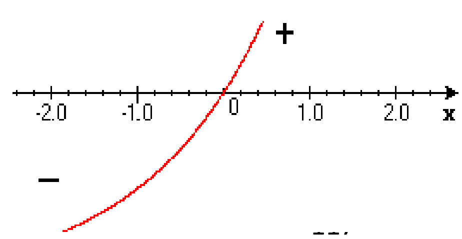
Esta función no tiene eje de simetría.

- Intercepto con eje de ordenadas.

Ya se calculó el intercepto con este eje para el esbozo gráfico que es el valor $y = 0$.

- Signo

Para el signo, basta con analizar el eje de las abscisas, utilizando los ceros y ubicar los signos correspondientes, recuerda que lo que se hace es resolver una inecuación con



Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

radicales, obteniéndose el esbozo gráfico de la figura, luego el signo de esta función es:

Positiva: $\{x \in \Re : x > 0\}$

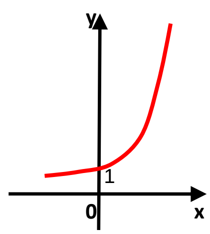
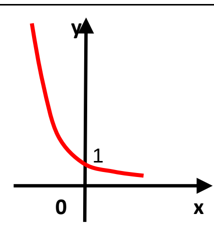
Negativa: $\{x \in \Re : x < 0\}$

c) Esta función es inyectiva, recuerda que para que sea inyectiva, la función debe ser estrictamente creciente o decreciente, y esta es creciente. Otra forma para demostrar que es inyectiva es la prueba de la recta paralela al eje de las abscisas, si lo verificas observarás que la corta en un punto.

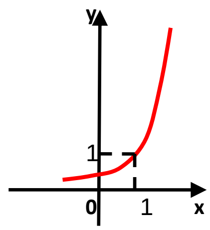
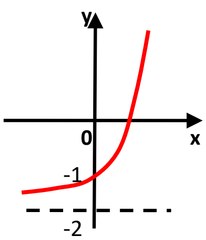
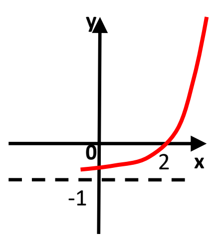
Analiza entonces que esta función no tiene imagen plena, por lo que no es sobreyectiva.

Luego la función no es biyectiva.

A continuación, se ofrece un cuadro resumen con las distintas maneras en que puede aparecer expresada una función exponencial, su esbozo gráfico y algunas de sus propiedades principales

Ecuac.	Ejemplo	Desplazam	Esbozo gráfico	Dom	Imag	Ceros	Monot	I. Ord	Signo
$y = a^x$	$y = 2^x$	Asínt. $y = 0$ $(-d; e+1)$ $(0;1)$		$x \in \Re$	$y \in \Re_+^*$	-----	M.C	$y=1$	posit. $x \in \Re$
	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	Asínt.		$x \in \Re$	$y \in \Re_+^*$	-----	M.D	$y=1$	posit. $x \in \Re$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
Web of Sciece/Core Collection
Book Citation Index
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

		$y=0$ $(-d;e+1)$ $(0;1)$							
$y=a^{x+d}$	$y=2^{x-1}$	Asínt. $y=0$ $(-d;e+1)$ $(1;1)$	 	$x\in\Re$	$y\in\Re_+^*$	-----	M.C	$y=\frac{1}{2}$	posit. $x\in\Re$
$y=a^{x}+e$	$y=4^{x}-2$	Asínt. $y=-2$ $(-d;e+1)$ $(0;-1)$	 	$x\in\Re$	$y\in\Re:$ $y>-2$	$x=\frac{1}{2}$	M.C	$y=-1$	negat. $x<\frac{1}{2}$ posit. $x>\frac{1}{2}$
$y=a^{x+d}+e$	$y=4^{x-2}-1$	Asínt. $y=-1$ $(-d;e+1)$ $(2;0)$	 	$x\in\Re$	$y\in\Re:$ $y>-1$	$x=2$	M.C	$y=-\frac{15}{16}$	negat. $x<2$ posit. $x>2$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Ejercicios del epígrafe

1. Dada la función $h_{(x)} = 3^{x-8} + 1$.

a) Realice su esbozo gráfico.
b) Determine dominio e imagen de h.
c) Calcule $h_{(1)}$ y $h_{(6)}$.

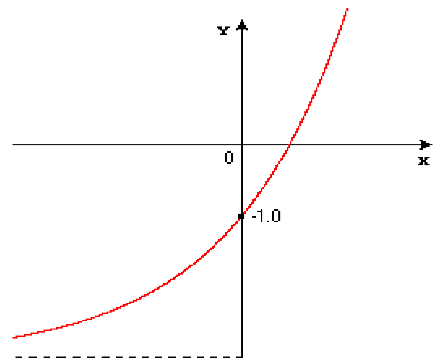
2. Sea la función $p_{(x)} = 0{,}3^{x+1} - 9$.

a) Esboce su gráfico.
b) Determine dominio, imagen, asíntota.
c) ¿Es p una función monótona creciente? Justifique.
d) Se puede afirmar que p es una función inyectiva. ¿Por qué?

3. Se tiene la función definida por la ecuación $g_{(x)} = 7^{x+3} - 49$.

a) Esboce su gráfico.
b) Indique dominio e imagen.
c) Se puede afirmar que g es una función que no es par ni impar. ¿Por qué?
d) ¿Es g una función impar? Justifique.

4. Dado el siguiente esbozo gráfico correspondiente a una función de la forma $f_{(x)} = 2^{x+1} + e$.



a) Escriba su ecuación.
b) Determine: dominio, imagen y asíntota.
c) ¿Para qué valores del dominio la función f es no negativa?
d) Verifica si el punto $P(-2;3)$ pertenece al gráfico de f.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
Book Citation Index
Web of Sciece/Core Collection
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

5. Sea la función definida en $\Re$ por la ecuación $k_{(x)} = 3^{2-x} - 9$.

a) Esboce su gráfico.
b) Determine: imagen, ceros y asíntota.
c) ¿Es k una función creciente? Justifique.
d) ¿Para qué valores del dominio la función k es negativa?

6. Sea la función $t_{(x)} = (0{,}7)^{x^2-9} - 1$. Determine:

a) Dominio e imagen de t.
b) Intercepto con eje de ordenadas.
c) ¿Es t una función par? Justifique su respuesta.
d) Los valores del dominio para los cuales $t_{(x)} \geq 0$.

7. De una función del tipo $g_{(x)} = x^n; n \in Z$, se conoce que el par ordenado $(2;32)$ pertenece al gráfico de la ecuación.

a) Escribe la ecuación de g.

b) Analiza su monotonía.

c) Determina dominio e imagen de g.

d) ¿Es g una función par? Justifica.

8. Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a) ___ El conjunto imagen de la función h definida en $\Re$, por la ecuación $h_{(x)} = (3)^{x-4} - 9$, es $\{y \in \Re : y \geq -9\}$.

b) ___ El conjunto imagen de la función g definida en el conjunto de los números reales por $g_{(x)} = 0{,}2^{x-1}$ es $\{y \in \Re : y > 0\}$.

c) ___ El dominio de la función t definida por la ecuación $t_{(x)} = 2^{x-3} - 8$, es $\{x \in \Re\}$.

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

d) ___ Sea la función p definida en el conjunto de los números reales a través de la ecuación $p_{(x)} = \left(\frac{2}{7}\right)^{3x}$, entonces la función p es monótona creciente.

e) ___ La imagen de la función definida por la ecuación $f_{(x)} = 3^x$ en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$ es un número racional.

f)___ Sea la función f definida en $f_{(x)} = 2^{x-\frac{1}{2}}$, entonces $f_{(1)} = 2$.

g) ___ La función definida por la ecuación $m_{(x)} = 0{,}3^x + 9$, tiene un único cero.

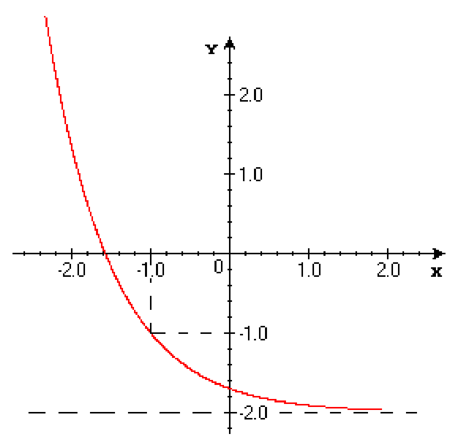
h) ___ La función k definida en $\Re$ por la ecuación $k_{(x)} = 4^{x-8} + 15$, tiene como asíntota la recta $y = 15$.

i) ___ El punto característico de la función definida por la ecuación es $y = 3{,}4^{x-7} + 5$, tiene como coordenadas $(7;5)$.

j) ___ La función real g definida en $\Re$ por la ecuación $g_{(x)} = 2^x - \frac{1}{4}$ es monótona creciente y negativa para todos los valores reales de x, tales que $x < 0$.

9. Selecciona la respuesta correcta y marca con una *x* en la línea dada.

9.1. El siguiente esbozo gráfico corresponde a una función de la forma $q_{(x)} = a^{x+d} + e$, entonces su ecuación es:



a) ___ $q_{(x)} = 3^{x+1} - 1$

b) ___ $q_{(x)} = 3^{x+1} - 2$

c) ___ $q_{(x)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 1$

d) ___ $q_{(x)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 2$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

9.2. La función real de ecuación $y=3^{x+2}$

a) __ es par b) __ es inyectiva

c) __ tiene imagen en $\{y \in \Re : y \geq 0\}$ d) __ es monótona decreciente

9.3. Sea $f_{(x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$, los valores de x para los cuales el gráfico de $f_{(x)}$ está por debajo de la ordenada 16, son:

a) ___ $x > -1$ b) ___ $x = 1$ c) ___ $x < -1$ d) ___ $x \geq 4$

9.4 Cualquiera sea x real, la función $f_{(x)} = 10^{x}$:

a) ___ Es monótona decreciente. b) ___ Es positiva para $x \leq 0$ y par.

c) ___ Admite por inversa a la función $f_{(x)} = \sqrt{x}$. d) ___ No tiene ceros y es inyectiva.

9.5. Sea la función $p_{(x)} = 3^{x+1} + e$, de la cual se sabe el punto $(2;18)$, entonces se puede afirmar que:

a) ___ p es creciente y no tiene ceros.
b) ___ p es inyectiva y tiene una asíntota en $y = 18$.
c) ___ p impar y decreciente.
d) ___ p tiene como punto característico $(-1;-8)$.

10. Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera en cada caso.

a) Sea la función g definida en $\Re$ por la ecuación $g_{(t)} = a^{t}$. Los valores reales de a para los cuales la función g es monótona decreciente son: ________________________________.
b) El conjunto imagen de la función definida por la ecuación $y = 3^{x+2} - 5$, es: ____________.

Book Citation Index
Web of Sciece/Core Collection
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

c) La asíntota de la función definida por la ecuación $m_{(x)} = 3^{x+5}$ es la recta ______________.

d) La función definida por la ecuación $y = 4^{x+2} - 0{,}16$, tiene como cero: ________________.

e) La asíntota de la función definida en $\Re$ por la ecuación $y = 5^{x+4} - 5$ es la recta ________.

f) El intercepto con el eje de ordenadas de la función $y = 2^{x-2} - 0{,}3$ es un número ________.

g) La imagen de la función $y = (0{,}5)^x - 25$ es el conjunto ____________________________.

h) Un ejemplo de una ecuación que defina una función exponencial que cumpla las condiciones de ser monótona creciente y su asíntota sea la recta $y = -4$ es: ___________.

i) Sea $f_{(x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$, entonces los valores de dominio para el cual $f_{(x)}$ es mayor o igual que la unidad son: _______________________________.

j) Sean p y q son elementos cualesquiera del dominio de una función exponencial con $p > q$, para los cuales se cumple que $f_{(p)} > f_{(q)}$, entonces se puede afirmar que f es una función monótona _______________________.

1.11. La Función Logarítmica

Definición

La correspondencia que a cada $x \in \Re$ se le hace corresponder el número real $f_{(x)} = \log_a(x+d) + e(x > -d; a > 0, a \neq 1)$, donde a, d y e son números reales dados, se denomina función logarítmica.

- **Ejemplos**

  1. $y = \log_2(x-1) \to (a = 2; d = -1; e = 0)$

  2. $y = \log_3 x + 8 \to (a = 3; d = 0; e = 8)$

  3. $y = \log_{0,3}(x-7) \to (a = 0{,}3; d = -7; e = 0)$

  4. $y = \log_4(x+2) - 1 \to (a = 4; d = 2; e = -1)$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

- **Esbozo gráfico**

Esta función es la inversa de la función exponencial, por lo que el esbozo gráfico de una función del tipo $f_{(x)} = \log_a(x+d) + e(x > -d; a > 0, a \neq 1)$ es una curva, donde el punto de coordenadas $(-d+1; e)$ recibe el nombre de punto característico y es hasta donde se traslada el origen de la función y tiene una asíntota vertical que es la recta $x = -d$.

Algunos elementos a tener en cuenta para analizar la función cúbica:

- Si $0 < a < 1$, la función es monótona decreciente.
- Si $a > 1$, la función es monótona creciente.
- La función logarítmica no es par ni impar.
- La función logarítmica no tiene valor máximo ni valor mínimo.

Ejemplo resuelto

Sea la función g definida en $\Re$ por la ecuación $g_{(x)} = \log_2(x+2) - 1$.

a) Realice su esbozo gráfico.
b) Determine:

- Dominio
- Imagen
- Ceros
- Monotonía
- Paridad
- Asíntota
- Valor Máximo
- Valor Mínimo
- Eje de simetría
- Intercepto con eje de ordenadas
- Signo

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

c) Clasifíquela en inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

Respuesta

a) Para realizar este esbozo gráfico se tomará el punto característico, los ceros (en caso que tenga), el intercepto con el eje de ordenadas (en caso que tenga), y algunos puntos que pertenezcan a la función.

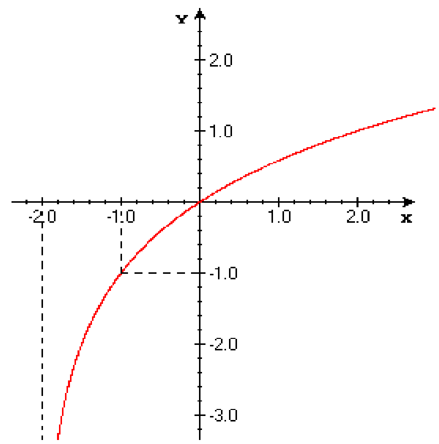
Punto característico: esta función tiene la forma $g_{(x)} = \log_a(x+d)+e(a>0, a\neq 1; x>-d)$, donde el punto característico $(-d+1;e)$ tiene coordenadas $(-1;-1)$.

Calculando el intercepto con el eje de ordenas, que se calcula evaluando la función para $x=0$, se obtiene que $y=0$.

Calculando los ceros, que se determina igualando la ecuación a cero, se obtiene que es: $x_0 = 0$.

Determinando el ploteo de puntos:

x	-1	0	2
y	-1	0	1



Representando en el sistema de coordenadas el punto característico, el cero, el intercepto con el eje de las ordenadas y los puntos calculados en el ploteo, se obtiene el esbozo gráfico mostrado en la figura.

b) Propiedades

- Dominio

Si analizas las operaciones que aparecen en su ecuación, observarás que la única que se indefine en el conjunto de los números reales es la logaritmación, debe cumplirse que $x+2>0$, luego $x>-2$, entonces el dominio de esta función es $x \in \Re : x > -2$. En el gráfico observarás claramente que este está definido hacia la derecha de $x=-2$.

- Imagen

En el gráfico observarás claramente que este abarca todo el eje de las ordenadas, luego la imagen es $y \in \Re$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

- Ceros

Ya se calculó para el esbozo gráfico que es: $x_0 = 0$

- Monotonía

Esta función al analizar su esbozo gráfico de izquierda a derecha observarás que es monótona creciente en todo su dominio, además $a > 1$.

- Paridad

Recuerda que debes analizar si es par o impar:

Para que sea par, debe cumplirse que $g_{(x)} = g_{(-x)}$ y al calcular no se cumple ya que: $\log_2(x+2)-1 \neq \log_2(-x+2)-1$, luego la función no es par, además su gráfico no es simétrico respecto al eje de las ordenadas.

Para que sea impar, debe cumplirse que $f_{(x)} = -f_{(-x)}$ y al calcular no se cumple, ya que $\log_2(x+2)-1 \neq -\log_2(-x+2)+1$, luego la función no es impar, además su gráfico no es simétrico respecto al origen de las coordenadas.

A modo de conclusión, esta función no es par ni impar.

- Asíntota.

Esta función tiene una asíntota vertical en $x = -2$

- Valor Máximo

Si te percatas esta función no tiene valor máximo.

- Valor Mínimo

Si te percatas esta función no tiene valor máximo.

- Eje de simetría

Esta función no tiene eje de simetría.

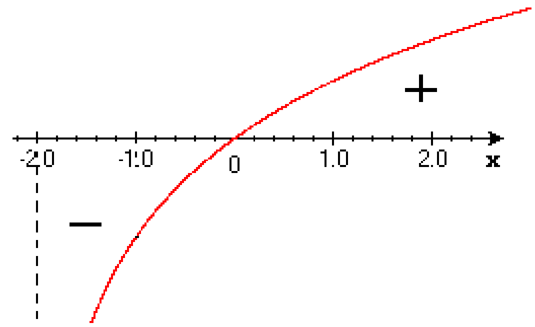
- Intercepto con eje de ordenadas

Ya se calculó el intercepto con este eje para el esbozo gráfico que es el valor $y = 0$.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

- Signo

Para el signo basta con analizar el eje de las abscisas, utilizando los ceros y ubicar los signos correspondientes, recuerda que lo que se hace es resolver una inecuación con radicales, obteniéndose el esbozo gráfico de la figura, luego el signo de esta función es:



Positiva: $\{x \in \Re : x > 0\}$

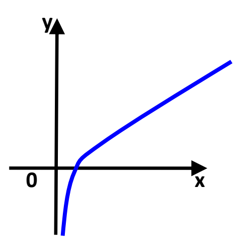
Negativa: $\{x \in \Re : -2 < x < 0\}$

c) Esta función es inyectiva, recuerda que para que sea inyectiva, la función debe ser estrictamente creciente o decreciente, y esta es creciente. Otra forma para demostrar que es inyectiva es la prueba de la recta paralela al eje de las abscisas, si lo verificas observarás que la corta en un punto.

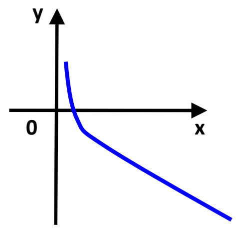
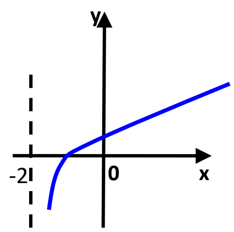
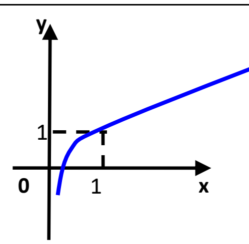
Analiza entonces que esta función tiene imagen plena, por lo que es sobreyectiva.

Luego la función es biyectiva.

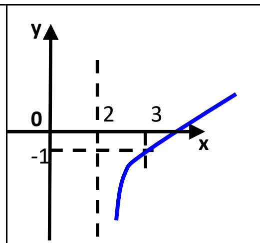
A continuación, se ofrece un cuadro resumen con las distintas maneras en que puede aparecer expresada una función logarítmica, su esbozo gráfico y algunas de sus propiedades principales

Ecuación	Ejemplo	Desplazam	Esbozo gráfico	Dom	Ima g	Ceros	Mon	I. Ord	Signo
$y = \log_a x$	$y = \log_2 x$	Asínt. $x = 0$ $(-d+1; e)$ $(1;0)$		$x \in \Re_+^*$	$y \in \Re$	$x = 1$	M.C	-----	negativa $0 < x < 1$ positiva $x > 1$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

	$y=\log_{\frac{1}{3}} x$	Asínt. $x=0$ $(-d+1;e)$ $(1;0)$		$x \in \Re_{+}^{*}$	$y \in \Re$	$x=1$	M.D	-----	negativa $x>1$ positiva $0<x<1$
$y=\log_a(x+d)$	$y=\log_4(x+2)$	Asínt. $x=-2$ $(-d+1;e)$ $(-1;0)$		$x \in \Re:$ $x>-2$	$y \in \Re$	$x=-1$	M.C	$y=\frac{1}{2}$	negativa $-2<x<-1$ positiva $x>-1$
$y=\log_a x+e$	$y=\log_2 x+1$	Asínt. $x=0$ $(-d+1;e)$ $(1;1)$		$x \in \Re_{+}^{*}$	$y \in \Re$	$x=\frac{1}{2}$	M.C	-----	negativa $0<x<\frac{1}{2}$ positiva $x>\frac{1}{2}$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

$y=\log_a(x+d)+e$	$y=\log_3(x-2)-1$	Asínt. $x=2$ $(-d+1;e)$ $(3;-1)$		$x\in\Re:$ $x>2$	$y\in\Re$	$x=5$	M.C	-----	negativa $2<x<5$ positiva $x>5$

Ejercicios del epígrafe

1. Se tiene la función $y=\log(x-8)-1$, analiza y responde:

a) ¿Es esta función monótona creciente? Justifique su respuesta.
b) Esta función no es par ni impar. ¿Por qué?
c) Determine: dominio, imagen y cero.

2. Se tiene la función $f_{(x)}=\log_{0,2}(x-1)+2$.

a) Esboce su gráfico.
b) Determine: dominio, imagen, cero y asíntota.
c) Se puede afirmar que f es monótona decreciente. ¿Por qué?

3. Dada la función definida por la ecuación $d_{(x)}=\log(x-11)+4$

a) ¿Es d una función inyectiva? ¿Por qué?
b) Indique: dominio, imagen, ceros y asíntota.
c) Esboce su gráfico.
d) ¿Es d una función impar? Justifique.
e) Se puede afirmar que d es una función monótona creciente en todo su dominio. ¿Por qué?

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

4. Sea la función $k_{(x)}^{-1} = \log_7(x+7)-9$, la inversa de la función k.

a) Halla la ecuación de k.

b) Determine dominio, imagen y monotonía de k.

c) ¿Es k^{-1} una función impar? Justifique.

d) ¿Cuál es la condición, respecto a la recta $y = x$, que debe cumplirse entre los gráficos de ambas funciones?

5. Sea la función $p_{(x)} = 2\log_4(x)+1$.

a) Esboce su gráfico.

b) Indique: dominio, monotonía y signo.

c) Verifique si el punto $M(4;3)$ pertenece al gráfico de p.

d) Es p una función inyectiva y monótona creciente. ¿Por qué?

6. Se tiene la función $h_{(x)} = \log_2(x-2)+e$ y se sabe que el punto $(3;6) \in h_{(x)}$.

a) Determine la asíntota de h.

b) Determine el punto característico de h.

c) ¿Es h una función par? Justifique.

d) Escriba un intervalo donde h sea negativa.

e) Determine, si existe, la inversa de h.

7. Sea la función definida por la ecuación $g_{(x)} = \log_3(x+7)-1$.

a) Indique: dominio, monotonía y asíntota.

b) ¿Para qué valores del dominio, la función g, es no negativa?

c) ¿Es g una función par? Justifique.

d) Realice su esbozo gráfico en el intervalo $[-6;1]$.

8. Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a) ___ El dominio de definición de la función $t_{(x)} = \log_5(x-8)$ es $\{x \in \Re : x > 8\}$.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

b) ___ Los ceros de la función p cuya ecuación es $p_{(x)}=\log_2 x^2-1$ son $x_0=1$ y $x_1=-1$.

c) ___ La función cuya ecuación $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ es inyectiva e impar.

d) ___ La imagen de la función definida por la ecuación $f_{(x)}=\log_3 x$ en el punto de abscisa $x=9$ es un número natural.

e) ___ Toda función logarítmica de ecuación $y=\log_a x;(x>0;a>1)$, es monótona creciente en todo su dominio.

f) ___ La función definida por la ecuación $y=\log_4 x+9$, tiene como asíntota el eje de las ordenadas.

g) ___ La función $y=\log_{0,3} x-2$, es positiva en todo su dominio.

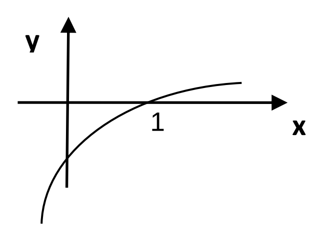
h) ___ La función definida por la ecuación $y=\log_2 x$ es impar.

i) ___ La función definida por la ecuación $y=\log_6(x-8)-2$, no corta al eje de las ordenadas.

j) ___ Toda función de la forma $y=\log_2(x+d)+e$, tiene inversa.

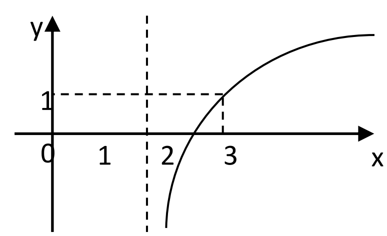
9. Selecciona la respuesta correcta y marca con una *x* en la línea dada.

9.1. El siguiente gráfico corresponde a una función de la ecuación $f_{(x)}=\log_3(x+h)-1$, entonces el valor de h es:



a) __ $h=-2$ b) __ $h=2$ c) __ $h=0$ d) __ $h=1$

9.2. El gráfico que se muestra corresponde a la ecuación:



a) ___ $y=\log_{1/3}(x-2)+1$

b) ___ $y=\log_3(x-2)+1$

c) ___ $y=\log_{1/3}(x+1)-2$

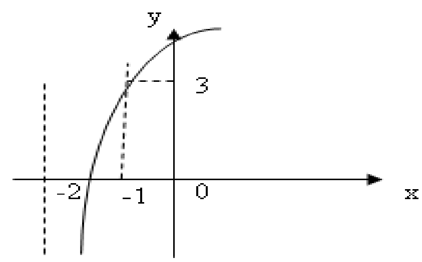
d) ___ $y=\log_3(x+1)-2$

Book Citation Index
Web of Sciece/Core Collection
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

9.3. El dominio de la función g, con $g(x)=\log_2(-\frac{1}{2}x+1)$ es:

a) __ $\{x\in\Re : x>0\}$ b) __ $\{x\in\Re : x\neq 2\}$ c) __ $\{x\in\Re : x<2\}$ d) __ $\{x\in\Re : x>2\}$

9.4. Si el gráfico que se muestra, corresponde a una función cuya ecuación tiene la forma $y=\log_3(x+b)+c$, entonces su ecuación es:



a) ___ $y=\log_3(x+2)+3$

b) ___ $y=\log_3(x+2)-3$

c) ___ $y=\log_3(x-2)+3$

d) ___ $y=\log_3(x-2)-3$

9.5. El conjunto imagen de la función $y=\log_2(x+1)-5$ en el intervalo $(1\leq x<7)$ es:

a) ___ $\{y\in\Re\}$ b) ___ $\{y\in\Re : -4\leq y\leq -2\}$

c) ___ $\{y\in\Re : -4\leq y< -2\}$ d) ___ $\{y\in\Re : -4< y< -2\}$

10. Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera en cada caso.

e) El dominio de definición de la función $y=\log(x+4)-25$ es: ________________________.

f) La asíntota de la función definida por la ecuación $y=9\log_{0,6}(x+7)+2$ es: _____________.

g) La función $y=\log_9(x+1)-7$ tiene como conjunto imagen: __________________________.

h) Toda función de la forma $y=\log_a x;(x>0)$ con $0<a<1$ es una función monótona ______.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

i) El cero de la función definida por la ecuación $f_{(x)} = \log_7(x+1) - 2$ es: _________________.

j) La inversa de la función $y = \log_8(x-7) + 9$ tiene como ecuación _____________________.

k) La función $y = \log_2(x+8) - 1$ es no negativa para: _________________________________.

l) La función definida por $y = \log_{0,3}(x+1) - 2{,}24$ corta al eje de las ordenadas en __________.

m) La imagen de la función $y = \log_7(x - 2{,}51)$ en el punto de abscisa $x = 3$ es un número ____.

n) Sea la función $g_{(x)} = \log_8(x+2) - 4$ entonces:

- Si para cualesquiera sean a y b, elementos del dominio de g, se cumple que $g_{(a)} = g_{(b)}$ sí y solo si $a = b$, entonces la función g es: ______________.
- Si se restringe el dominio de definición de g al conjunto de los números reales no negativos, entonces el conjunto imagen de la nueva función es: ____________.

1.12. Las Funciones Trigonométricas

Definición

- La correspondencia que a cada $x \in \Re$ se le hace corresponder el número real $f_{(x)} = senx$, se denomina función seno.
- La correspondencia que a cada $x \in \Re$ se le hace corresponder el número real $f_{(x)} = \cos x$, se denomina función coseno.
- La correspondencia que a cada $x \in \Re$ se le hace corresponder el número real $f_{(x)} = \tan x; \left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in Z \right)$, se denomina función tangente.

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

- La correspondencia que a cada $x \in \Re$ se le hace corresponder el número real $f_{(x)} = \cot x; (x \neq k\pi; k \in Z)$, se denomina función cotangente.

Ejemplos

1. $y = senx + 2$
2. $y = \cos x + 3$
3. $y = \tan x + 5$
4. $y = \cot(x + 4)$

Esbozo gráfico

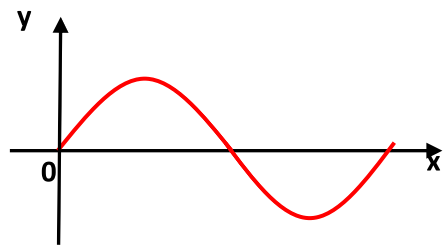
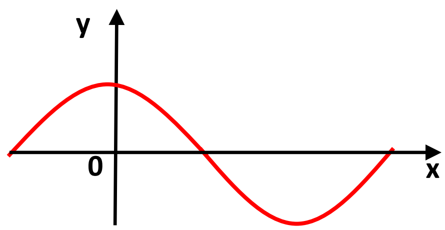
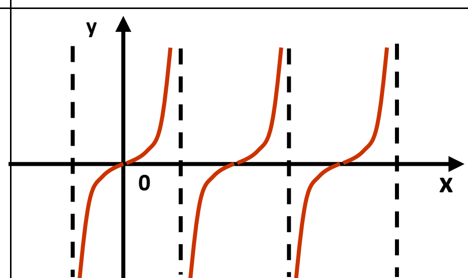
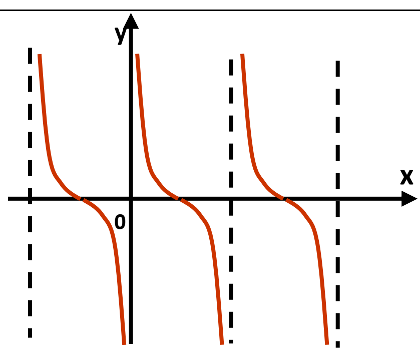
- El esbozo gráfico de las funciones seno y coseno es una oscilación armónica y cuando son de la forma $y = senx$ y $y = \cos x$, su imagen se encuentra en el intervalo [-1;1].
- El esbozo gráfico de las funciones tangente y cotangente son parábolas cúbicas, repetidas a lo largo del eje de las abscisas, con un período de π, además tienen asíntotas verticales; cuando están en la forma $y = \tan x$ y $y = \cot x$ estas pasan por los puntos de abscisas $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in Z$ y $x = k\pi; k \in Z$ respectivamente.
- Estas funciones, generalmente, se analizan en el intervalo principal $[0;2\pi]$
- Estas funciones también se dilatan y se contraen, solo que analizaremos los esbozos gráficos y sus propiedades en su función canónica.

Algunos elementos a tener en cuenta para analizar las funciones trigonométricas:

- Las funciones trigonométricas no son monótonas, aunque por intervalos, se puede determinar si crecen o decrecen.
- Estas funciones por intervalos se les puede determinar el signo.
- Las funciones trigonométricas son periódicas.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

A continuación, se ofrece un cuadro resumen con las funciones trigonométricas canónicas, su esbozo gráfico y algunas de sus propiedades principales

Ecuación	Esbozo gráfico	Dom	Imag	Ceros	Perío.	Paridad
$y = senx$		$x \in \Re$	$y \in [-1;1]$	$x = (k\pi)$; $k \in Z$	2π	Impar
$y = \cos x$		$x \in \Re$	$y \in [-1;1]$	$x = (2k+1)\pi$; $k \in Z$	2π	Par
$y = \tan x$		$x \in \Re$: $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $k \in Z$	$y \in \Re$	$x = k\pi$; $k \in Z$	π	Impar
$y = \cot x$		$x \in \Re$: $x \neq (k\pi)$; $k \in Z$	$y \in \Re$	$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $k \in Z$	π	Impar

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Ejercicios del epígrafe

1. Analiza si los pares ordenados siguientes son elementos de la función $f_{(x)} = senx$

a) $(\pi;1)$ b) $(3\pi;0)$ c) $\left(\frac{\pi}{6};\frac{1}{2}\right)$ d) $\left(-\frac{\pi}{2};-1\right)$

2. Determina los ceros de la función $g_{(x)} = 2\cos 2x - 1$.

3. Sea la función $y = \tan x$.

a) Determine 2 puntos que pertenezcan a su gráfico.
b) ¿Es esta función impar? Justifique.
c) ¿Es esta función monótona? ¿Por qué?

4. Sea la función $k_{(x)} = \cot x$.

a) Calcule sus ceros.
b) Calcule $k_{(\pi)}$ y $k_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}$.
c) ¿Es k una función impar? Justifique.

5. Determina el signo de las funciones $y = \tan x$ y $y = \cot x$ en los siguientes intervalos:

a) $(0 < x < \pi)$
b) $\left(\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right)$

6. Determina para qué valores de $x \in [0;\pi]$ las funciones $f_{(x)} = 2\tan x - \tan 2x$ y $g_{(x)} = \frac{\tan x}{\cot x}$ alcanzan el mismo valor.

7. Sea la función $\mathrm{h}_{(\mathrm{x})} = \mathrm{sen}(\mathrm{x})$ en el intervalo $[-\pi; 2\pi]$

a) Determina sus ceros.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

b) Represéntala gráficamente.

c) Calcula: $h\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

8. Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a) ___ El gráfico de la función q de ecuación $q_{(x)} = 2\cos^2 x - 1$ definida en el intervalo $[0\,;\,2\pi]$, corta el eje x en dos puntos.

b) ___ El gráfico de la función m cuya ecuación es $m_{(x)} = 3\cos^2 x - 4$ corta el eje de las ordenadas en $(0\,;-1)$.

c) ___ La función f definida en $\Re$ por la ecuación $f_{(x)} = 3\cos x$ es una función par.

d) ___ La función n definida por la ecuación $n_{(x)} = 2senx$ es una función par.

e) ___ La función f definida en $\Re$ de ecuación $f_{(x)} = 2\cos x$, es inyectiva.

f) ___ La función h definida por la ecuación $h_{(x)} = 3\tan x$ en el intervalo $(-\pi;\pi;)$ es monótona creciente.

g) ___ La función r definida por la ecuación $r_{(x)} = 3\cot x + 3$, no tiene ceros.

h) ___ La función $y = \cos x$, es par.

i) ___ Las funciones trigonométricas son monótonas.

j) ___ Los valores reales de x para los cuales la función $y = 3\tan^2 - 3$ es el conjunto de los números reales.

9. Selecciona la respuesta correcta y marca con una *x* en la línea dada.

9.1. Se tiene la función $y = 2senx$, entonces se puede afirmar que:

a) ___ La función es monótona.

b) ___ La función par e inyectiva.

c) ___ La función es impar y tiene dominio $x \in \Re$

d) ___ La imagen de la función es $\{y \in \Re : -1 < y < 1\}$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

9.2. Se tiene la función $y = \cos x$, entonces se puede afirmar que:

a) ___ La función no es monótona.
b) ___ La función es inyectiva.
c) ___ La función es impar.
d) ___ La imagen de la función es $\{y \in \Re\}$

9.3. Se tiene la función $y = \tan x$, entonces se puede afirmar que:

a) ___ La función es monótona decreciente
b) ___ La función es inyectiva y par
c) ___ La función es impar.
d) ___ La imagen de la función es $\{y \in \Re^*\}$

9.4. Se tiene la función $y = \cot x$, entonces se puede afirmar que:

a) ___ La función no tiene ceros.
b) ___ La función es biyectiva.
c) ___ La función es par.
d) ___ La imagen de la función es $\{y \in \Re\}$

9.5. Las funciones trigonométricas cumplen la condición de ser:

a) ___ Pares y sobreyectivas.
b) ___ Impares y monótonas crecientes.
c) ___ No ser monótonas.
d) ___ Siempre cortar al eje de ordenadas y tener ceros.

10. Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera en cada caso.

a) La función definida por la ecuación $y = 4\cos x$ tiene como ceros: ____________________.
b) El dominio de la función definida por la ecuación $y = \tan x$ es: ______________________.
c) La imagen de la función $y = \cot x$ en el intervalo $(0;2\pi)$ es: ________________________.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

d) La función definida por la ecuación $y = senx + 1$ corta al eje de las ordenadas en ________.

e) La función definida por la ecuación $y = \tan x(-\pi < x < \pi)$ es monótona ________________.

f) La monotonía de la función definida por $y = \cos x(0 \le x \le \pi)$es ______________________.

g) El dominio de la función definida por la ecuación $y = \cot x$ es ______________________.

h) Los ceros de la función definida por la ecuación $y = \tan^2 x - 3$ son: __________________.

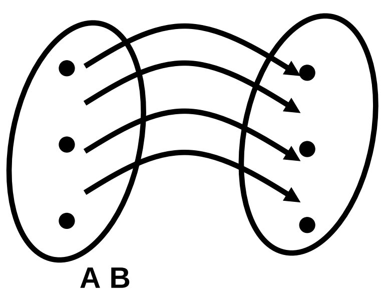
i) La imagen de la función $y = sen(x) + 3$ en el punto de abscisa $x = 0$ es: _______________.

j) Un ejemplo de una ecuación que defina una función trigonométrica par es: ____________.

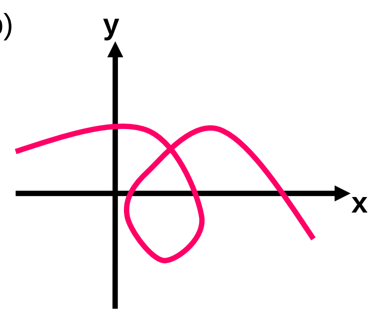
1.13. Ejercicios del Capítulo

1. Determina cuál de los siguientes gráficos representan funciones. Justifique en cada caso.

a)



b)



2. Determina cuál de los siguientes conjuntos representan una función. Justifique en cada caso.

a) $G = \{(2;3), (5;1), (4;7), (3;9)\}$

b) $H = \{(x;y) \,/\, y = x + 3, x \in \Re\}$

c) $J = \{(1;2), (2;2), (3;3), (3;4)\}$

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

d) $F=\{(x;y)\,/\,y = 2x-5\ ;\ x\in\Re\}$

e) $K=\{(x;y)\,/\,y = \pm\sqrt{4} - x^2\ ;\ x\in\Re\}$

3. Sea la función $t(x) = \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$.

a) Halla el dominio de t.

b) Halla el valor de a, para el cual se cumple que el par ordenado (100; a), pertenece al gráfico de t.

c) Determina los ceros de t.

4. Realiza el esbozo gráfico y determina: dominio, imagen y monotonía de las siguientes funciones:

a) $y = 2x - 0{,}4; x \in (-1;6)$

b) $y = \sqrt{x+2} - 1$

c) $y = \sqrt[3]{x+5} - 1 \quad (-3 > x \geq 2)$

d) $y = 2^{x+1} - 4$

e) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1} - 9$

f) $y = \log_2(x-3) + 4$

f) $y = \log_{0,5}(x-4) + 2; (x > 5)$

5. Se conoce que los pares ordenados (–6;–4) y (3;–1) pertenecen al gráfico de la función $p_{(x)} = \sqrt{x+a} + b$

a) Halla la ecuación de la función p.

b) Determina dominio e imagen de p.

c) Representa gráficamente la función p.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
Book Citation Index
Web of Sciece/Core Collection
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

6. Sea la función $p_{(x)} = \log_{6-x} x$. Determine el dominio de p.

7. Sean las funciones $h_{(x)} = \cos x - 2\cos 2x$ y $g_{(x)} = sen 2x - \cos x$. Determina para qué valores de x se cumple que $h_{(x)} = g_{(x)}$.

8. Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a) ___ La correspondencia $F = \{(2;3);(1;2);(2;1);(4;1)\}$ es una función.

b) ___ Sean $A = \{0;1;2;8\}$ y $B = \{0;2;4;16\}$. Si $g = \{(0;0),(1;2),(2;4),(8;16)\}$ representa una correspondencia definida de A en B, entonces g es una función sobreyectiva.

c) ___ La correspondencia definida de $N \to N$, donde a cada número natural n se le hace corresponder su sucesor, es una función.

d) ___ La correspondencia definida de $\Re \to \mathrm{Z}$ donde a cada número real x se le hace corresponder su opuesto es una función.

e) ___ La correspondencia definida de $\mathrm{N} \setminus \{0\}$ en N, donde a cada $n \in \mathrm{N} \setminus \{0\}$ se le hace corresponder sus divisores es una función.

f) ___ La correspondencia definida de $N \to N$, donde a cada número natural n entre 10 y 99 se le hace corresponder sus divisores es una función.

g) ___ La correspondencia definida de $N \to N$ en el que a cada número natural le asocia su antecesor, es una función.

h) ___ La correspondencia definida de $\Re \to \Re$ en el que a cada número real le asocia su recíproco, es una función.

i) ___ La correspondencia que a cada número natural le asocia sus múltiplos, es una función.

j) ___ La correspondencia que cada número racional le asocia su raíz cúbica, es una función.

k) ___La correspondencia definida de $\Re \to \Re$, donde a cada número real se le asocia el número 3, es una función.

l) ___ Sean $A = \{a;b;c\}$ y $B = \{0;1;2;3\}$ dos conjuntos y la correspondencia **h** definida de **A** en **B** tal que $h = \{(a;0);(b;1);(c;2);(c;4)\}$, entonces **h** es una función.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

m) ___ El cero de una función es aquel valor del dominio cuya imagen es cero.

n) ___ La correspondencia **f** que asocia a cada número real su cuadrado aumentado en cinco unidades, es una función par.

o) ___ La composición de funciones no es una composición conmutativa.

p) ___ La función $f : A \to B$ es par, sí y solo sí, A es simétrico.

q) ___ La correspondencia $F = \{(1;2);(2;3);(3;2);(4;1)\}$ define una función inyectiva.

r)___ El conjunto de pares ordenados $\{(1;5);(2;8);(3;9);(4;11)\}$es una función inyectiva.

s)___ Las funciones inyectivas son pares.

t)___ El dominio de la función t de ecuación $t(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$ es $\{x \in \Re : x < 0 \textbf{ ó } x \geq 1\}$.

u) ___ Si para $m, n \in \Re; m > 0; n > 0$ se cumple que $(0,3)^m > (0,3)^n$, entonces $m < n$.

v) ___ Si $k \in \Re_+^*$, entonces $\log_2 k \in \Re$.

w) ___ Toda función logarítmica es creciente.

x) ___ El dominio de la función $y = ^{2x+8} -16$ es el conjunto de los números reales.

y) ___ La imagen de la función $y = senx$ es el conjunto de los números reales, mayores que cinco.

z) ___ La composición de funciones siempre existe.

9. Selecciona la respuesta correcta y marca con una *x* en la línea dada.

9.1. El dominio de definición de la función definida por: $\{(1;\sqrt{2});(2;\sqrt{3});(3;\sqrt{5});(5;\sqrt{7})\}$ es:

a) ___ $\{\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{5};\sqrt{7}\}$.

b) ___ Un subconjunto del conjunto de los números naturales.

c) ___ El conjunto de los números racionales.

d) ___ Ninguno de los conjuntos anteriores.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

9.2. Los ceros de la función $y = |x-6| - 9$ son:

a) __ $x_1 = 3; x_2 = 15$ b) __ $x_1 = 6; x_2 = -9$ c) __ $x_1 = 3; x_2 = -15$ d) __ $x_1 = -3; x_2 = 15$

9.3. Los valores reales negativos para los cuales la función $f_{(x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}$ es menor o igual que la unidad es:

a) __ $x \geq -\frac{1}{2}$ b) __ $x \leq -\frac{1}{2}$ c) __ $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ d) __ $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$

9.4. El dominio de la función g definida por la ecuación $g_{(x)} = \log_2\left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ es:

a) ___ $\{x \in \Re : x > 0\}$ b) ___ $\{x \in \Re : x \neq 2\}$ c) ___ $\{x \in \Re : x < 2\}$ d) ___ $\{x \in \Re : x > 2\}$

9.5. El dominio de la función $f_{(x)} = \log(x^2 - 5x + 6)$ es:

a) __ $(2;3)$ b) __ $(0;+\infty)$ c) __ $\Re$ d) __ $(-\infty;2) \cup (3;+\infty)$

9.6. El dominio de la función p definida por la ecuación $p(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}$ es:

a) ___ $\{x \in \Re : 0 \leq x \text{ ó } x > 1\}$ b) ___ $x \in \Re$ c) ___ $\{x \in \Re : x \neq 1\}$ d) ___ $\{x \in \Re : 0 < x < 1\}$

9.7. La función M dada por la ecuación $M(x) = \frac{x^2+5}{x^3 + x^2 - 4x + 6}$ tiene como dominio:

a) __ $\{x \in \Re : x \neq -3\}$ b) __ $\{x \in \Re : x \neq 3\}$ c) __ $\{x \in \Re : x \neq -6\}$ d) __ $\{x \in \Re : x \neq -2\}$

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

9.8. El conjunto solución para el cual la función definida por la ecuación, $f_{(x)}=\dfrac{x-1}{x^3-1}$ es no negativa es:

a) ___ $S=\{x\in\Re : x\neq -1\}$ c) ___ $S=\{x\in\Re : x>1\}$

b) ___ $S=\{x\in\Re\}$ d) ___ $S=\{x\in\Re : x\geq 0\}$

9.9. El dominio de la función q definida por la ecuación $q_{(x)}=\log_x\left(\sqrt{x+1}\right)$ es:

a) ___ $\{x\in\Re : x>-1\}$ b) ___ $\{x\in\Re : x>0; x\neq 1\}$

c) ___ $\{x\in\Re_+^*\}$ d) ___ $\{x\in\Re : -1<x<0\}$

9.10. Si $p_{(x)}=(fog)_{(x)}$ con $p_{(x)}=\sqrt{x^2-6x}$ y $g_{(x)}=x^2-6x$, entonces $f_{(x)}$ es:

a) __ $f_{(x)}=\sqrt{x+1}$ b) __ $f_{(x)}=\sqrt{5x}$ c) __ $f_{(x)}=\sqrt{x}$ d) __ $f_{(x)}=\sqrt{x^2+1}$

10. Completa los espacios en blanco, de forma tal, que se obtenga una proposición verdadera en cada caso.

a) La pendiente de la función definida por $y=0{,}4-13x$ es: ___________________.

b) La parábola $y=2x^2-6x+7$ expresada en la forma $y=a(x+d)^2+e$ es: _______________.

c) El dominio de la función definida por la ecuación $y=\sqrt{2x-7}+0{,}8$ es: _________________.

d) El conjunto imagen de la función definida por $y=25^{x+9}-7{,}5$ es: ______________________.

e) El dominio de la función definida por la ecuación $y=\log x$ es: _______________________.

f) La ecuación de la función inversa de la función definida por la ecuación $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)-3$ es: __________________________.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

g) Un ejemplo de una ecuación que define una función impar y monótona decreciente en todo su dominio es: __________________________.

h) Una ecuación que define una función impar, sobreyectiva y monótona decreciente en todo su dominio es: ____________________________.

i) El dominio de la función f definida por la ecuación $f_{(x)} \log|x|$ es: ____________________.

j) La función definida por $y = \dfrac{x+3}{x^2-25}$ es no negativa para: ___________________________.

k) Sean las funciones $f_{(x)} = 6x + 3$ y $h_{(x)} = \sqrt[3]{x-8}$, entonces:

- $(f + h)_{(x)}$ es: _________________.
- $(f - h)_{(x)}$ es: _________________.
- $(f \cdot h)_{(x)}$ es: __________________.
- $(f / h)_{(x)}$ es: __________________.
- $(foh)_{(x)}$ es: ___________________.
- $(hof)_{(x)}$ es: ___________________.

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Capítulo 2. Aplicación de las Funciones

Generalmente se hace uso de las funciones reales, (incluso, cuando el ser humano no se da cuenta), en el manejo de cifras numéricas en correspondencia con otra, debido a que se están usando subconjuntos de los números reales. Las funciones son de mucho valor y utilidad para resolver problemas de la vida diaria, problemas de finanzas, de economía, de estadística, de ingeniería, de medicina, de química y física, de astronomía, de geología, y de cualquier área social donde haya que relacionar variables. Cuando se va al mercado o a cualquier centro comercial, siempre se relaciona un conjunto de determinados objetos o productos alimenticios, con el costo en pesos para así saber cuánto podemos comprar; si lo llevamos al plano, podemos escribir esta correspondencia en una ecuación de función "x" como el precio y la cantidad de producto como "y".

Se puede aplicar en muchas situaciones, por ejemplo en economía (uso de la oferta y la demanda) los económicos se basan en la linealidad de esta función y las leyes de la oferta y la demanda; estas son dos de sus relaciones fundamentales. Por ejemplo, si un consumidor desea adquirir cualquier producto, este depende del precio en que el artículo esté disponible. Una relación que especifique la cantidad de un artículo determinado que los consumidores estén dispuestos a comprar, a varios niveles de precios, se denomina ley de demanda. La ley más simple es una relación del tipo $P= mx + n$, donde P es el precio del artículo por unidad y m y n son constantes. Muchas son las aplicaciones de la función lineal en el caso de la medicina. Ciertas situaciones requieren del uso de ecuaciones lineales para el entendimiento de ciertos fenómenos. Un ejemplo es el resultado del experimento psicológico de Stenberg, sobre recuperación de información.

El estudio de las funciones cuadráticas resulta de interés no solo en Matemática sino también en Física y en otras áreas del conocimiento, como por ejemplo: la trayectoria de una pelota lanzada al aire, la trayectoria que describe un río al caer desde lo alto de una montaña, la forma que toma una cuerda floja sobre la cual se desplaza un equilibrista, el recorrido desde el origen, con respecto al tiempo transcurrido, cuando una partícula es lanzada con una velocidad inicial.

Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Puede ser aplicada en la ingeniería civil, para resolver problemas específicos, tomando como punto de apoyo la ecuación de segundo grado, en la construcción de puentes colgantes que se encuentran suspendidos en uno de los cables amarrados a dos torres.

Los biólogos utilizan las funciones cuadráticas para estudiar los efectos nutricionales de los organismos. Existen fenómenos físicos que el hombre a través de la historia ha tratado de explicarse. Muchos hombres de ciencias han utilizado como herramienta principal para realizar sus cálculos la ecuación cuadrática. La geología como ciencia requiere del planteamiento de ecuaciones logarítmicas para el cálculo de la intensidad de un evento, tal como es el caso de un sismo. La magnitud R de un terremoto está definida como R= Log (A/A^0) en la escala de Richter, donde A es la intensidad y A^0 es una constante. (A es la amplitud de un sismógrafo estándar, que está a 100 kilómetros del epicentro del terremoto).

Los astrónomos para determinar una magnitud estelar de una estrella o planeta utilizan ciertos cálculos de carácter logarítmico. La ecuación logarítmica les permite determinar la brillantez y la magnitud. En la física la función logarítmica tiene muchas aplicaciones entre las cuales se puede mencionar el cálculo del volumen "L" en decibeles de un sólido, para el cual se emplea la siguiente ecuación L= 10 Log (I/I_0), donde I es la intensidad del sonido (la energía cayendo en una unidad de área por segundo), I_0 es la intensidad de sonido más baja que el oído humano puede oír (llamado umbral auditivo). Una conversación en voz alta tiene un ruido de fondo de 65 decibeles.

Se aplica a la química y física. En algunos elementos radioactivos son de tal naturaleza que su cantidad disminuye con respecto al tiempo, se cumple la ley exponencial y se dice que el elemento decrece o decae. En la química, el PH de una sustancia, cuando el PH es menor que 7, se dice que es ácida, mientras que su PH es mayor que 7, se dice que es base. Los ambientalistas miden constantemente el PH del agua de lluvia debido al efecto dañino de la "lluvia ácida" que se origina por las emisiones de dióxido de azufre de las fábricas y plantas eléctricas que trabajan con carbón.

Otra aplicación de las funciones exponenciales fue el descubrimiento del Polonio (elemento radioactivo) por Marie Curie en 1898. El crecimiento poblacional (Demografía) de una región o

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

población en años, parece estar sobre una curva de característica exponencial que sugiere el modelo matemático En la medicina, muchos medicamentos son utilizados para el cuerpo humano, de manera que la cantidad presente sigue una ley exponencial de disminución.

En Matemática Financiera (Administración), para el cálculo de interés compuesto se emplean las funciones exponenciales. Las funciones exponenciales tienen gran aplicación en campos muy diversos como: Biología, Administración, Economía, Química, Física e Ingeniería.

Las funciones trigonométricas son valores sin unidades que dependen de la magnitud de un ángulo. Se dice que un ángulo situado en un plano de coordenadas rectangulares está en su posición normal si su vértice coincide con el origen y su lado inicial coincide con la parte positiva del eje x; en la Física se utilizan en las oscilaciones armónicas.

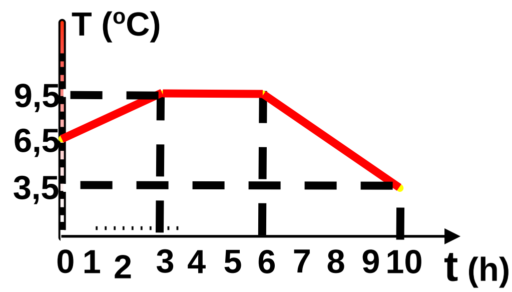
En óptica, en las dispersiones en prisma, o cuando un rayo de luz atraviesa una placa de cierto material. En la aviación, si dos aviones parten de una base aérea a la misma velocidad, formando un ángulo y siguiendo en trayectorias rectas, se puede determinar la distancia que se encuentra entre los mismos. El capitán de un barco puede determinar el rumbo equivocado del barco, siempre en línea recta, ordenando modificar el rumbo en grado para dirigirse directamente al punto destino correcto.

La función cúbica es generalmente utilizada para relacionar volúmenes en determinado espacio o tiempo. Otro ejemplo es el relacionar el crecimiento de un feto en gestación con el hecho de relacionar su distancia de los pies a la cabeza, lo que permite determinar las semanas de gestación del feto. También el hecho de relacionar los vientos o la energía eólica con respecto a la intensidad de estos y su tiempo de duración. Se utiliza más en el campo de la economía y de la física.

A continuación, se ofrece una propuesta de ejercicios donde se ponen de manifiesto las aplicaciones de las funciones en la vida práctica, con los cuales elevarás tu cultura general integral y te permitirán sistematizar las funciones elementales.

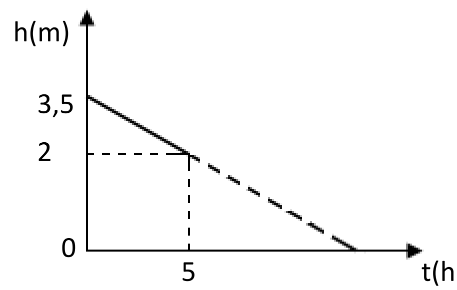
Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macías León,
Lissette Stefania Herrera Silva
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

1. El siguiente gráfico muestra la variación de la temperatura de una cámara refrigerada, medida desde las 8:00 am hasta las 6:00 pm.



a) ¿Qué temperatura había alcanzado la cámara a las 11:00 am?
b) ¿Durante qué tiempo la temperatura se mantuvo constante?
c) ¿Qué temperatura había alcanzado la cámara a las 10:30 a.m.?
d) Si a partir de las 6:00 p.m. la temperatura continúa descendiendo, como lo venía haciendo, determina a qué hora alcanza 0ºC.

2. Como parte de la campaña contra el mosquito Aedes Aegypti, en la capital del país se procedió a extraer el agua estancada en una piscina que no estaba funcionando, esto se muestra en el siguiente gráfico.



a) ¿Qué altura alcanzaba el agua antes de comenzar la extracción?

b) ¿A qué altura estaba el agua a las 3 horas de iniciado el proceso?

c) ¿En qué tiempo logró vaciarse completamente la piscina?

3. Dos personas se hospedan en un mismo hotel. Las habitaciones del tipo I cuestan \$13.00 cada noche y \$3.00 por la llave y las habitaciones del tipo II se cobran a \$13.50 cada noche. A y B se alquilan en habitaciones del tipo I y II respectivamente.

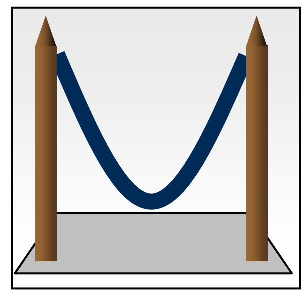
a) Analiza si las situaciones dadas representan funciones.
b) Escriba sus ecuaciones.
c) ¿Al cabo de cuántas noches pagan lo mismo?

¿Cuál me recomendarías para ahorrar más? ¿Por qué?

Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

4. Una pelota es lanzada hacia arriba. La dependencia entre la altura h (en metros) que alcanza la pelota en relación al tiempo t (en segundos) es: $h_{(t)}=24t - 4{,}9t^2$, sin tener en cuenta el viento.

a) ¿Cuál es la mayor altura que alcanza la pelota?
b) ¿En qué intervalo de tiempo asciende la pelota?
c) Representa gráficamente la función $h(t)=24t - 4{,}9t^2$ y responde: ¿después de qué tiempo de lanzada la pelota esta llega a tierra?



5. Un cordel está atado a la misma altura en dos pilares, como se muestra en la figura.

$f(s) = s^2 - 4s + 6$ describe la altura de cada punto del cordel en función de la distancia (en metros) entre los pilares.

a) ¿Cuál es la distancia mínima del cordel al suelo?
b) ¿A qué altura está atado el cordel?
c) Halla la distancia entre los pilares.
d) Halla los valores de *s* para los cuales la altura del cordel es inferior a los 3 m.

6. Un nadador se lanza a una piscina recorriendo bajo el agua una trayectoria parabólica de la forma $y=x^2+bx+c$. Si del punto en que entra al agua y al que sale hay 3,0 m; ¿a qué profundidad bajó el nadador?

7. La ganancia total de producción en miles de pesos de una empresa está dada por la ecuación $g_{(x)} = 480x - x^2$ donde x representa el total de unidades producidas mensualmente. ¿Cuántas unidades mensuales deben producir para que la ganancia total sea máxima?

Book Citation Index
Web of Sciece/Core Collection
9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

8. Estudiando la composición del aire entre las hojas de un prado de hierba alta, se ha observado que la concentración de dióxido de carbono (CO_2) varía según las distintas horas del día como resultado de la fotosíntesis que realizan las plantas. Se han tomado datos durante varios días y se ha concluido que la concentración viene dada por la fórmula $C = 2t^2 - 48t + 550$.

a) ¿Esta situación representará una función? Justifique.
b) ¿Cuál será la menor concentración de CO_2 que se registró en el estudio realizado?
c) Representa la situación dada en un gráfico.

9. La capacidad de una piscina en forma de cubo, está dada por la ecuación $c_{(a)} = 7a^3$, donde a es la longitud en metros de una de sus aristas. Se quiere ampliar la piscina, solo en profundidad, en 1,2m. Determine la nueva ecuación que define la capacidad de la piscina. Si la profundidad de la piscina después de la ampliación es de 3,4m, ¿cuál era la capacidad de la piscina, en litros, antes de la ampliación?

10. La siguiente ecuación $PH = -\log c(H^+)$ define una función logarítmica, la cual representa el PH de una sustancia y $c(H^+)$ es la concentración de iones hidrógeno.

a) Determine el PH de una sustancia que tiene $0{,}001\text{mol/L}$. Clasifíquela en ácida o básica.
b) ¿Es esta función monótona creciente? Justifique.

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Referencias

Ballester, S. y otros: Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo 1. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. Cuba. 1992.

Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo II. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. Cuba. 1992.

Colectivo de autores. Breve diccionario de la lengua española. Editorial Casa editorial abril, Ciudad de La Habana. Cuba. 2006.

Manual de ejercicios para la Educación Media Superior. Tomo I. La Habana. Cuba. Editorial Pueblo y Educación. 2008.

Ribnikov K. Historia de las Matemáticas. Primera Edición en Español. Editorial MIR. Moscú. Rusia.1987.

Silvestre Margarita y José Zilberstein. ¿Cómo hacer más Eficiente el Aprendizaje? ICCR. La Habana. Cuba.2000

Zilberstein J. y H. Valdés. Aprendizaje escolar, diagnóstico y calidad educativa. Ediciones CEIDE. México DC. 1999.

Tratamiento didáctico a las funciones elementales en la enseñanza de las matemáticas
Katherinne Lisset Reyes Contreras,
Esther Jessenia Mera Medina,
Mariana de Jesús Cervantes Barrios,
Juan Marcos Aguayo Litardo,
Blanca Carmita Arias García,
Silvia Lorena Macias León,
Lissette Stefania Herrera Silva

9 780311 000609
Recepción: 02-01-2024
Aprobación: 02-03-2024

Tratamiento didáctico a las funciones elementales en la enseñanza de las matemáticas

ETECAM
Editorial Tecnocientifica Americana
Estados Unidos de América

Editorial Tecnocientífica Americana

Domicilio legal: calle 613sw 15th, en Amarillo, Texas. **ZIP**: 79104, EEUU

Teléfono: 7867769991

Fecha de publicación:13 marzo de 2024

Código BIC: PBF **Código EAN: 9780311000609**

Código UPC: 978031100060 **ISBN: 978-0-3110-0060-9**

La Editorial Tecnocientífica Americana se encuentra indizada en, referenciada en o tiene convenios con, entre otras, las siguientes bases de datos: