La introducción generalizada de la probabilidad en los diversos niveles educativos ha ocasionado un gran auge en la investigación sobre didáctica de la probabilidad. En el presente libro se pretende lograr a partir de casos reales, que el estudiante del área de ingeniería aprenda el modelamiento probabilístico como alternativa en su proyecto de aula. Mediante el uso de resolución de problemas con intención didáctica, se trata de hacer que el estudiante aprenda fundamentalmente a combinar sus destrezas matemáticas con sus habilidades de programación, esto con el objetivo de que pueda resolver problemas sobre la base de la búsqueda de soluciones que le permitan familiarizarse con la vida real.

Isaakc Junior Ortiz Aguirre, Ingeniero Industrial, Magister Scientiarum en Gerencia de Empresas: Mención en Gerencia de Operaciones. Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas de la Universidad de Guayaquil, Ecuador. Tutor de varias tesis de grado y proyectos tecnológicos. Participa sistemáticamente en eventos científicos Nacionales. Es autor de varios artículos científicos y libros. Email: Isaakc_1989@hotmail.com https://orcid.org/0000-0002-0543-5738

Evelyn Jazmín Henríquez Antepara, Licenciada en Ciencias de la Educación con especialización en Comercio Exterior, Magister en Gerencia y Docencia en Educación Superior, Doctorando en Ciencias de la Educación. Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas de la Universidad de Guayaquil, Ecuador. Autora de diversas ponencias en eventos científicos, artículos y libros. Tutora de varias tesis de grado y proyectos tecnológicos. Email: jazmin19803@hotmail.com https://orcid.org/0000-0001-7465-2376

Elsy Rodríguez Revelo, Doctora en Educación, Máster en Planificación, evaluación y acreditación de la Educación Superior, Licenciada en Ciencias de la Educación. Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas de la Universidad de Guayaquil, Ecuador. Autora de diversas ponencias en eventos científicos, artículos y libros. Tutora de varias tesis de grado y proyectos de investigación. Email: elsy.rodriguezr@ug.edu.ec, http://orcid.org/0000-0003-4486-0785

Silvia Adriana Ruata Avilés, Magíster en Finanzas y Proyectos Corporativos. Economista. Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas de la Universidad de Guayaquil, Ecuador. Tutora de varias tesis de grado y de proyectos relacionados a la Gestión Social del Conocimiento. Ha participado en eventos nacionales e internacionales. Autora de diversas publicaciones científicas. Email: silvia.ruataa@ug.edu.ec http://orcid.org/0000-0002-4145-3917

Belkis Chiquinquirá Cañizales Perdomo, Ingeniera Electricista, Magíster Scientiarum en Gerencia de Empresas: Mención en Gerencia de Operaciones. Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas de la Universidad de Guayaquil, Ecuador. Tutora de varias tesis de grado y Proyectos Tecnológicos. Ha participado en varios eventos nacionales e internacionales. Autora de diversas publicaciones científicas.
Email: bcanizales0211@gmail.com https://orcid.org/0000-0001-9063-2295

9 780311 000012

La didáctica de la teoría de conjuntos y las probabilidades
una mirada hacia las ciencias y la ingeniería

9 780311 000012

ETECAM
Editorial Tecnocientífica Americana

La didáctica de la teoría de conjuntos y las probabilidades

una mirada hacia las ciencias y la ingeniería

Isaakc Junior Ortiz Aguirre
Evelyn Jazmín Henríquez Antepara
Elsy Rodríguez Revelo
Silvia Adriana Ruata Avilés
Belkis Chiquinquirá Cañizales Perdomo

ETECAM
Editorial Tecnocientífica Americana

La didáctica de la teoría de conjuntos y las probabilidades: una mirada hacia las ciencias y la ingeniería

Diseño: Ing. Erik Marino Santos Pérez.

Traducción: Prof. Dr. C. Ernan Santiesteban Naranjo.

Corrección de estilo: Prof. Dra. C. Kenia María Velázquez Avila.

Diagramación: Prof. Dr. C. Ernan Santiesteban Naranjo.

Director de Colección Educación: Prof. Dra. C. Kenia María Velázquez Avila.

Jefe de edición: Prof. Dra. C. Kenia María Velázquez Avila.

Dirección general: Prof. Dr. C. Ernan Santiesteban Naranjo.

Esta obra ha sido evaluada por pares académicos a doble ciegos

Lectores/Pares académicos/Revisores: 0011 & 0042

Editorial Tecnocientífica Americana

Domicilio legal: calle 613nw 15th, en Amarillo, Texas.

ZIP: 79104

Estados Unidos de América, 2020

Teléfono: 7867769991

Código BIC: PBW

ISBN: 978-0-3110-0001-2

9 780311 000012

ETECAM
Editorial Tecnocientífica Americana
Estados Unidos de América

Tabla de contenido

Capítulo 1. Proceso de enseñanza-aprendizaje

El acto didáctico -según Marqués (2001)- es la actuación del profesor para facilitar los aprendizajes de los estudiantes. Se trata de una actuación cuya naturaleza es esencialmente comunicativa. Se presenta, de esta manera, el acto didáctico como un proceso complejo en el que se hallan presentes diversos componentes.

Entre los componentes se encuentran el profesor y los alumnos. El profesor quien planifica actividades dirigidas a los alumnos quienes se desarrollan con una estrategia didáctica concreta que pretende el logro de determinados objetivos educativos. Objetivos que serán evaluados al final del proceso para valorar el grado de adquisición de estos (García & Tuñón, 2004).

Las funciones para desarrollar por el profesor en los procesos de enseñanza–aprendizaje se deben centrar en la ayuda hacia los alumnos para que puedan, sepan y quieran aprender: orientación, motivación y recursos didácticos. Por su parte, los estudiantes, que mediante la interacción con los recursos formativos que tienen a su alcance y con los medios previstos, realizan determinados aprendizajes a partir de la ayuda del profesor (Román, 2003).

La estrategia didáctica con la que el profesor pretende facilitar los aprendizajes de los estudiantes, está integrada por una serie de actividades que contemplan la interacción de los alumnos con determinados contenidos. La estrategia didáctica debe proporcionar a los estudiantes, la motivación, información y orientación para realizar sus aprendizajes (Aznar, Raso, & Hinojo, 2017).

El proceso de enseñanza–aprendizaje se considera un acto sémico como proceso en el que el contenido se torna signo compartido para emisor y receptor. “En último término, cabría concluir que la enseñanza, el acto didáctico, no es otra cosa que una modalidad concreta del proceso comunicativo, un tipo especial de comunicación”. “La identificación de los procesos comunicativos con procesos de enseñanza–aprendizaje comienza a convertirse ya en un lugar común en la bibliografía científica” (Benítez, 2007 y Bustos, 1973).

El aprendizaje es la confluencia de dos actuaciones, la del profesor y la del alumno, ambos actuando en el marco de una institución. En esta relación hay un protagonismo múltiple y en ella cobran valor docente, discente y contexto en el que se produce el intercambio. El aprendizaje se plantea como la construcción de forma activa y progresiva del alumno, de sus propias estructuras de adaptación e interpretación a través de “experiencias” directas o mediadas (Benítez, 2007).

En la enseñanza presenta un carácter sistémico y estructural. El subsistema didáctico posee una estructura sistémica con seis componentes: objetivos didácticos, contenidos, medios, relaciones de comunicación, organización y evaluación (De la Peña & Velázquez, 2018).

Según Ferrández (1995), el objeto de la didáctica - el acto didáctico- puede plantearse como "la interacción intencional y sistemática del docente y del discente en situaciones probabilísticas usando las estrategias más propias para integrar los contenidos culturales, poniendo en actividad todas las capacidades de la persona y pensando en la transformación sociocultural del contexto endógeno y exógeno que le es patrimonial".

Los mediadores presentes en el acto didáctico, según Ferrández (1997) son: a) El formador como elemento clave de la mediación en la formación b) Los participantes, mediadores de su propio aprendizaje c) El método, las diferentes opciones organizativas que son previas a la utilización de los medios y recursos.

Ferrández (1997) nos sitúa ante la posibilidad de una multivariedad de estrategias metodológicas. Los elementos implicados: profesor, alumno, grupo, acción comunicativa, medios y recursos, organización espacial y temporal pueden estar relacionados de maneras diferentes.

El aprendizaje siempre implica:

- Una recepción de datos que supone un reconocimiento y una elaboración semántico-sintáctica de los elementos del mensaje (palabras, iconos, sonido) donde cada sistema simbólico exige la puesta en juego actividades mentales distintas: los textos activan las competencias lingüísticas, las imágenes las competencias perceptivas y espaciales, etc.

- La comprensión de la información recibida por parte del estudiante que, a partir de sus conocimientos anteriores (con los que establecen conexiones sustanciales), sus intereses (que dan sentido para ellos a este proceso) y sus habilidades cognitivas, analizan, organizan y transforman (tienen un papel activo) la información recibida para elaborar conocimientos.

- Una retención a largo plazo de esta información y de los conocimientos asociados que se hayan elaborado.

- La transferencia del conocimiento a nuevas situaciones para resolver con su concurso las preguntas y problemas que se plateen.

1.1. Concepciones sobre los procesos de aprendizaje

Desde la perspectiva conductista, formulada por Skinner hacia mediados del siglo XX y que se deriva de Wundt y Watson, pasando por los estudios psicológicos de Pavlov sobre condicionamiento, y de los trabajos de Thorndike sobre el refuerzo, intenta explicar el aprendizaje a partir de unas leyes y mecanismos comunes para todos los individuos.

Por su parte, el aprendizaje significativo (Ausubel y Novak) postula que el aprendizaje debe ser significativo, no memorístico, y para ello los nuevos conocimientos deben relacionarse con los saberes previos que posea el aprendiz. Frente al aprendizaje por descubrimiento de Bruner, defiende el aprendizaje por recepción donde el profesor estructura los contenidos y las actividades a realizar para que los conocimientos sean significativos para los estudiantes.

En el enfoque cognitivo que se sustenta en la psicología cognitivista (Merrill y Gagné) se basa en las teorías del procesamiento de la información, sumando a esto algunas ideas conductistas (refuerzo, análisis de tareas) y del aprendizaje significativo, aparece en la década de los sesenta y pretende dar una explicación más detallada de los procesos de aprendizaje, el constructivismo.

El constructivismo tiene como máximo exponente Piaget. En sus estudios sobre epistemología genética, en los que determina las principales fases en el desarrollo cognitivo de los niños, elaboró un modelo explicativo del desarrollo de la inteligencia y del aprendizaje en general a partir de la consideración de la adaptación de los individuos al medio.

1.2. Didáctica de las probabilidades

La introducción generalizada de la probabilidad en los diversos niveles educativos ha ocasionado un gran auge en la investigación sobre didáctica de la probabilidad. Hacer una panorámica de la investigación sobre didáctica de la probabilidad no es una tarea sencilla, debido a la explosión experimentada en estos estudios en las últimas décadas. En el presente libro se pretende lograr a partir de casos reales, que el alumno del área de ingeniería trate de aprender el modelamiento probabilístico, como alternativa en su proyecto de aula. Mediante el uso de resolución de problemas con intención didáctica, se trata de que el alumno aprenda fundamentalmente a combinar sus destrezas matemáticas con sus habilidades de programación, esto con el objetivo de que pueda resolver problemas sobre la base de la búsqueda de soluciones que le permitan familiarizarse con la vida real.

Por otro lado, la simulación es un instrumento esencial para la enseñanza de la modelación en probabilidad por el hecho de constituir un puente entre realidad y modelo matemático, es decir un modelo Pseudo concreto. Por ello, lleva al estudiante a una actividad de modelación, lo que implica la utilización de herramientas heurísticas, a la vez que le conduce a trabajar con el enfoque frecuencial de la probabilidad, y se coordina con el clásico para mejorar su comprensión de la ley de los grandes números. Consecuentemente la resolución del problema mediante simulación contribuye al refuerzo de múltiples facetas de su conocimiento didáctico.

1.2.1. Estadística y modelación

Gran parte de la actividad matemática, y particularmente la estadística, puede ser descrita como proceso de modelación. En términos de Henry (1997, p. 78) “un modelo es una interpretación abstracta, simplificada e idealizada de un objeto del mundo real, de un sistema de relaciones o de un proceso evolutivo que surge de una descripción de la realidad”. La construcción de modelos, su comparación con la realidad, su perfeccionamiento progresivo interviene en cada fase de la resolución de problemas estadísticos, no solo en el análisis de datos en situaciones prácticas, sino también en el trabajo de desarrollo teórico. Un ejemplo notable de modelación estadística a partir de un problema práctico son las distribuciones de probabilidad, que permiten describir en forma sintética el comportamiento de las distribuciones empíricas de datos estadísticos y hacer predicciones sobre su comportamiento.

Por ejemplo, la modelación de datos de conteo se hace típicamente usando el modelo Poisson. Por otro lado, el proceso de Poisson relaciona la función de Poisson, que representa un conjunto de eventos independientes sucedidos en un intervalo de tiempo o región del espacio con los tiempos dados entre la ocurrencia de los eventos.

1.2.2. Aleatoriedad

Según Batanero (2001) la aleatoriedad es un modelo matemático que permite describir un gran número de fenómenos en forma más adecuada que otros modelos deterministas. Esto se logra a partir de dos ideas muy simples: repetibilidad de la situación en las mismas condiciones e independencia de resultados en dos repeticiones. De ahí surgen una serie de modelos de complejidad progresiva que permiten resolver problemas de inferencia y de predicción en presencia de incertidumbre.

Según Méndez & Díaz (2014) una de las nociones centrales en la construcción de pensamiento probabilístico es el concepto de aleatoriedad. Quien comprende la distinta naturaleza de los fenómenos que conforman la realidad tiene grandes ventajas en los complejos procesos atribuidos al estudio de la probabilidad. Esta noción, como bien han señalado Azcárate y otros (1998), es ambigua, compleja y habitualmente es considerada como un concepto obvio sin que su significado sea analizado con profundidad. Ellos plantean la hipótesis de que determinados tipos de concepciones pueden ser un claro obstáculo para la comprensión de la naturaleza probabilística de ciertos aspectos de la realidad. El concepto de suceso aleatorio se presenta como un aspecto fundamental para contribuir al desarrollo de una cultura probabilística.

1.2.3. Función de densidad de probabilidades

La función de densidad de probabilidades es una función que al integrarse entre un límite inferior (L1) y un límite superior (L2), indica la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores entre L1 y L2. El área total definida por la función de densidad de probabilidades es igual a 1. Existen varios tipos de distribución como son: uniforme, gaussiana, exponencial, entre otras. La figura 1 muestra la función de densidad de probabilidades para una distribución gaussiana y una distribución uniforme respectivamente. El área pintada en azul claro representa el valor de la probabilidad de que la variable tome valores entre L1 y L2 (Reyes, 2012).

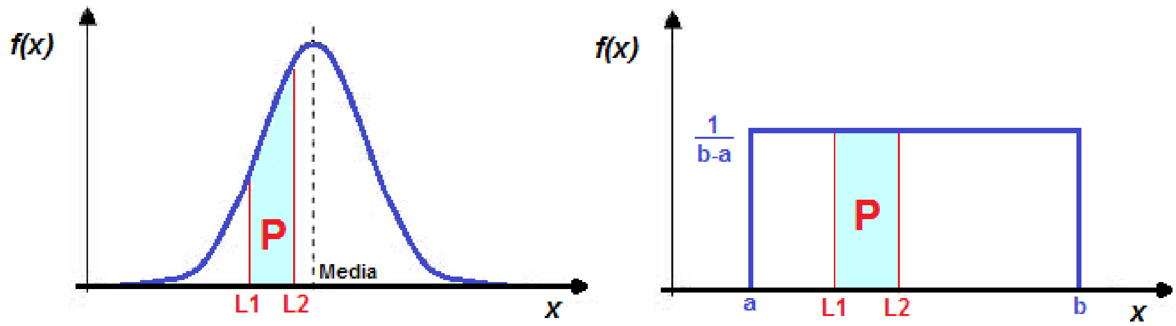


Figura 1. Función de densidad de probabilidades para una distribución gaussiana y una distribución uniforme respectivamente.

Capítulo 2. Teoría de conjuntos

Un conjunto es la agrupación, clase, o colección de objetos o de elementos que pertenecen y responden a la misma categoría o grupo de cosas, por eso se los puede agrupar en el mismo conjunto. Como lo indica Briones (2017) "… los conjuntos son una colección ya sea de objetos, o números de personas, o colores, etc., y estos son llamados miembros del conjunto".

Los conjuntos claramente son usados en el entorno de diferentes ciencias, ya sea matemáticas, física, química etc. La idea de un conjunto es asociar diferentes elementos que tienen relación entre cada uno de ellos, por lo cual puede ser aplicable en diferentes entornos su uso pues facilita la colección de objetos diferentes (Guzmán, 2017).

2.1. Determinación de conjuntos

Se dice que un conjunto está bien determinado cuando, dado un elemento cualquiera, es posible ver si este pertenece o no al conjunto dado se puede determinar por: tabulación o extensión, comprensión o diagrama de Venn.

2.1.1. Tabulación o extensión

Los elementos son encerrados entre llaves y separados por comas, es decir, el conjunto se describe listando todos sus elementos entre llaves.

$$P = \{2, 3, 5, 7\}$$

"Extensión es la manera de determinar un conjunto que consiste en nombrar a cada uno de sus elementos" (Escande, 2013). "Un conjunto viene determinado por los elementos que lo componen, por lo que una manera de definir un conjunto consiste en escribir todos sus elementos. Ello se denomina extensión (Rodríguez, 2014).

2.1.2. Comprensión o construcción

Comprensión o construcción es aquella forma mediante la cual se da una propiedad que caracteriza a todos los elementos del conjunto y los elementos se dan mediante llaves {}. “La comprensión consiste en indicar la característica o propiedad común a todos los elementos del conjunto” (Escande, 2013).

“Cuando un conjunto es descrito por una propiedad que comparten sus elementos se dice que está determinado por comprensión (Briones, 2015). En este caso se emplea el símbolo que significa “tal que”, en forma simbólica es:

$$A = \{\, x \mid P(x)\} = \{X_1,\ X_2,\ X_3, \dots, X_n\}$$

2.1.3. Representación de conjuntos por diagrama de Venn

Un diagrama de Euler-Venn tiene como fin representar clases de objetos o de cosas que como elementos de un conjunto tienen alguna característica en común. “Un diagrama de Venn consiste, generalmente, en un rectángulo que representa el Universo U y en su interior figuras cerradas, círculos o elipses que representan a conjuntos” (Huertaz, 2014).

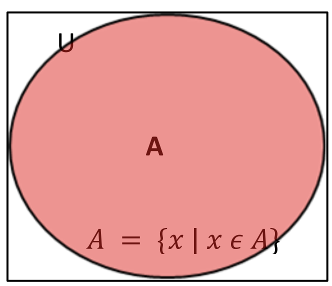


Figura 2. Diagrama de Venn

2.2. Cardinalidad de un conjunto

La cardinalidad de un conjunto que suele denotarse por un doble barra sobre el nombre del conjunto es la medida o cantidad de elementos que un conjunto tiene. “El término cardinal significa el concepto que a través del proceso de pensamiento se deriva de un conjunto C, al hacer abstracción de la cualidad de los miembros de C y del orden en que son dados el resultado de este doble acto de abstracción el cardinal potencial de C, se denota por Ĉ” (Wilder, 2013).

“El cardinal C es el conjunto de todos los conjuntos que son equivalentes a C” (Valencia, 2012).

El conjunto Q está formado por 3 elementos

Figura 3. Cardinalidad de conjuntos

- $Si\ A\ =\ \{a, b, c\}\ entonces\ n(A)\ =\ 3$
- $Si\ A\ =\ \{x\ |x\ es\ primo\ y\ x < 12\}\ entonces\ n(B)\ =\ 5$

Figura 4. Ejemplos de cardinalidad de conjuntos

2.3. Conjuntos relevantes

Un conjunto es una colección, reunión o agrupación de objetos que poseen una característica o propiedad común bien definida. Sea A un conjunto, se pueden dar los siguientes casos:

• A es un conjunto VACÍO si no tiene elementos. El símbolo que se utiliza para representar al conjunto vacío es Ø. N (A) = 0

• A es UNITARIO si tiene un único elemento. N (A) = 1

• A es FINITO si tiene una cantidad finita de elementos.

• A es INFINITO si no tiene una cantidad finita de elementos.

•A es REFERENCIAL o UNIVERSO cuando contiene todos los elementos que deseen considerarse en un problema, discurso o tema, sin pretender contener todo lo que no interesa al problema. El símbolo que se utiliza para representar a este conjunto es Re o U.

2.3.1. Conjunto vacío

Un conjunto vacío o nulo es aquel que no posee elementos. Se denota por Ø, bien por {}. “El conjunto vacío o nulo es un conjunto impropio que no contiene miembros en absoluto y se denota por Ø” (Rodríguez, 2013). Por cuanto, “un conjunto vacío, es aquel conjunto que no posee elementos en sí” (Briones, 2017).

$$\emptyset = \{x \in N \mid x \neq x\}$$

2.3.2. Conjunto unitario

El conjunto unitario es un conjunto que tiene exactamente un elemento en él. En otras palabras, solo hay un elemento que conforma el conjunto. “Cuando un conjunto solo posee un solo elemento, se le denomina con el nombre de conjunto unitario” (Escande, 2013).

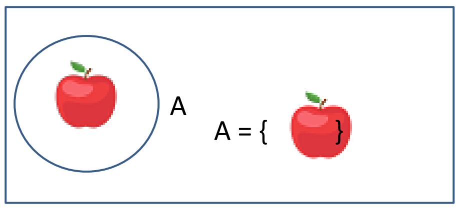


Figura 5. Conjunto unitario

2.3.3. Conjunto finito

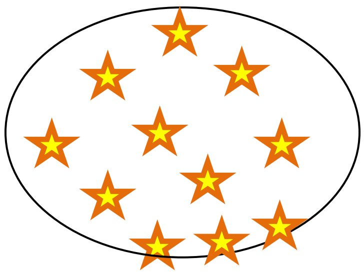
Un conjunto finito es aquel que sus elementos pueden ser contados. “Los conjuntos finitos, son aquellos en donde pueden ser contabilizados o enumerados todos los elementos de un conjunto” (Rodríguez, 2013).

Figura 6. Conjunto Finito

2.3.4. Conjunto infinito

Un conjunto infinito es aquel cuyos elementos no pueden ser contados, es decir, su cardinalidad no está definida. Si no se puede contar los elementos, es un conjunto infinito, o sea, si en un conjunto no se puede saber exactamente la cardinalidad o cantidad de conjuntos, entonces claramente es un conjunto infinito.

Asimismo, Rodríguez (2013) declara que: "Un conjunto infinito es aquel cuya cantidad de sus elementos no está determinada, pues no se sabe en sí cuál es la cantidad de elementos que tienen en total".



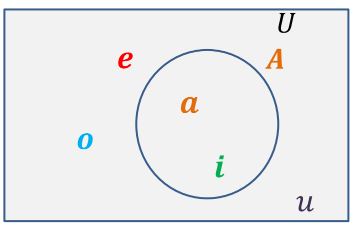
$$A = \{Las\ estrellas\}$$

Figura 7. Conjunto infinito

2.3.5. Referencial o universo

Un conjunto universal es la colección de todos los objetos en un contexto particular o teoría. Todos los demás conjuntos en ese marco constituyen subconjuntos del conjunto universal, que se denomina con la letra mayúscula y cursiva *U*

Valencia (2012) declara que se llama así al conjunto conformado por los miembros o elementos de todos los elementos que hacen parte de la caracterización.



$$U = \{a, e, i, o, u\}$$

$$A = \{a, i\}$$

Figura 8. Conjunto universo

2.4. Cuantificadores

Cuando se habla de cuantificadores en términos de lógica, teoría de conjuntos o matemáticas en general, se hace referencia a aquel símbolo que se utilizan para indicar cantidad en una proposición, es decir, permiten establecer "cuántos "elementos de un conjunto determinado, cumplen con cierta propiedad.

Como plantea Martínez (2014): "Los cuantificadores permiten la construcción de proposiciones a partir de funciones proposicionales, bien sea particularizando o generalizando". "Claramente los cuantificadores permiten construir proposiciones a partir de funciones proposicionales, ya sea particularizando o generalizando" (Kisbye, 2017).

2.5. Universal ∀

La universal ∀ se utiliza para afirmar que todos los elementos de un conjunto cumplen con una condición o propiedad determinada. Según López (2014): "Ciertamente el cuantificador universal indica que algo es cierto para todos los individuos".

"En lógica matemática, teoría de conjuntos y matemáticas en general, los cuantificadores son símbolos utilizados para indicar cuántos o qué tipo de elementos de un conjunto dado cumplen con cierta propiedad (por ejemplo, pertenencia, equivalencia u orden)" (Huertaz, 2014).

Se le denota con el símbolo ∀**,** que significa todo para todo, y se lo expresa como:

$$(\forall\ x \in A)\ \ p(x) o\ \forall\ x \in A : p(x)\ \ o\ bien\ A = \{x \in A\ \big|\ P(x)\ \}$$

2.5.1. Existencial ∃

El existencial ∃ se utiliza para indicar que existen uno o más elementos en el conjunto A que cumple(n) con una condición o propiedad determinada. "El cuantificador existencial se usa para indicar que hay uno o más elementos en el conjunto (no necesariamente único/s) que cumplen una determinada propiedad" (Calderón, 2013). De igual manera López (2016) define que: "El cuantificador existencial se usa para indicar que hay uno o más elementos en el conjunto"

El existencial se denota con el símbolo ∃ que significa, uno, al menos uno, por lo menos uno y se expresa de la siguiente manera:

$$(\exists x \in A)\ p(x)\ o\ \exists x\ \in A : p(x)\ o\ bien\ \{x \in A\ |P(x)\} \neq \emptyset$$

Ejemplo:

Sea $\mathrm{A} = \{1,2,3,4,5\}$. Determine el valor de verdad de cada uno de los enunciados siguientes:

$a.(\exists x \in A)(x + 3 = 10)$

Es falso porque ningún número de A es una solución de x+3=10

b.$(\forall x \in A)(x + 3 < 10)$

Es verdadero. Cualquier número de A cumple que x+3<10

2.6. Subconjuntos

Un subconjunto es una parte de un conjunto.

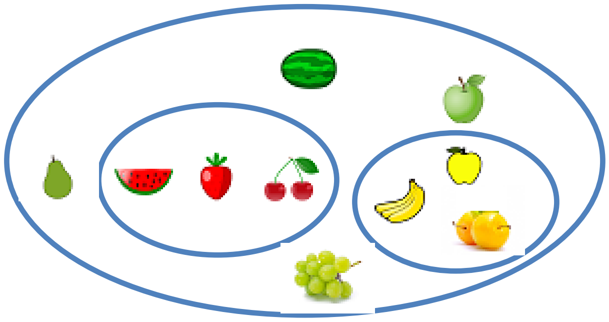


Figura 9. Conjunto subconjunto

Ejemplo:

Los programadores son un tipo particular de desarrolladores de software, así que cada programador es también un desarrollador. En el lenguaje de los conjuntos se expresa diciendo que el conjunto de programadores es un subconjunto del conjunto de los desarrolladores de software.
Un conjunto S es llamado un subconjunto de otro conjunto T, si cada elemento de S es un elemento de T. Esto se escribe como:

$$S \subset T(Se\ lee\ "S\ es\ un\ subconjunto\ de\ T"\ ).$$

El nuevo símbolo ⊂ significa “es un subconjunto de”.
Así $\{programadores\}$ a $\{desarrolladores\ de\ software\}$ porque cada búho es un pájaro.
Si $A = \{2,4,6\}$ y $B = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, entonces $A \subset B$. Porque cada elemento de A es un elemento de B.
El símbolo ⊄ quiere decir “no es un subconjunto”.
Esto significa que al menos un elemento de S no es elemento de T. Por ejemplo:
{Desarrolladores de software} ⊄ {DBA} Porque una DBA es un desarrollador (Base de Datos), pero no crea sistemas de software.
Si $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Entonces A ⊄ B.
Porque:
0 $\in A, pero\ 0B, se\ lee$ o pertenece al conjunto A. $pero$ 0 no pertenece al conjunto B.

2.7. Conjunto potencia

Sea A un conjunto. Llamamos conjunto potencia de A, y notamos P(A), al conjunto de todos los subconjuntos de A. P(A) también se conoce como el “conjunto de partes de A”. “Un conjunto potencia es el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto” (Martínez, 2014).

$$(\forall\ x)(x \in P)(A) \leq > X \subseteq A)$$

2.8. Relaciones entre conjuntos

Sean A y B conjuntos. Un subconjunto R del producto cartesiano A x B se llama una relación de A en B, es decir R es una relación de A en B si $R \in P(AxB)$.

“El nombre de relaciones es dado porque relacionan elementos de un mismo conjunto” (Huertas, 2013).

2.8.1 Igualdad entre conjuntos

Dos conjuntos son iguales, si y solo si, tienen los mismos elementos, o sea, si son el mismo conjunto. Dos conjuntos son iguales si tienen exactamente los mismos elementos.

Por ejemplo:
Si $A = \{ vocales\ del\ alfabeto \}$ y $B = \{a,\ e,\ i,\ o,\ u\}$ se dice que $A = B$
Por otro lado, los conjuntos $\{1, 3, 5\}$ y $\{1, 2, 3\}$ no son iguales, porque tienen diferentes elementos. Esto se escribe como $\{1, 3, 5\}$ a $\{1, 2, 3\}$
El orden en que los elementos están descritos dentro de los corchetes no importa en absoluto. Por ejemplo: $\{1, 3, 5, 7, 9\} = \{3, 9, 7, 5, 1\} = \{5, 9, 1, 3, 7\}$
Si un elemento aparece en la lista más de una vez, solo se contabiliza una vez. Por ejemplo: $\{a, a, b\} = \{a, b\}$
El conjunto $\{a, a, b\}$ tiene solo los dos elementos a y b. La segunda mención de a es una repetición innecesaria y puede ser ignorada.
Normalmente se considera mala notación cuando se enumera a un elemento más de una vez.

2.8.2 Conjuntos disjuntos o intersecantes

Los conjuntos A y B son disjuntos, si y solo si, A y B no tienen elementos en común, en cambio dos conjuntos A y B son intersecantes cuando tienen elementos pero $A \not\subset B\ y\ B \not\subset A, es\ decir, A\ no\ esta\ contenido\ en\ B\ y\ B\ no\ esta\ contenido\ en\ A$.

Como indica Cevallos (2013) “Se denomina conjuntos intersecantes aquellos que tienen elementos en común. Se llaman así porque su intersección es un conjunto no vacío”.

“En las matemáticas, dos conjuntos son disjuntos si no tienen ningún elemento en común, equivalentemente, dos conjuntos son disjuntos si su intersección es vacía” (Reino, 2016).

Por ejemplo:
Los conjuntos $S = \{2, 4, 6, 8\}$ y $T = \{1, 3, 5, 7\}$ son disjuntos.
A veces, dos conjuntos no tienen ningún elemento en común, esto es, la intersección de ambos conjuntos vacío. En este caso diremos que los conjuntos son disjuntos o intersecantes.

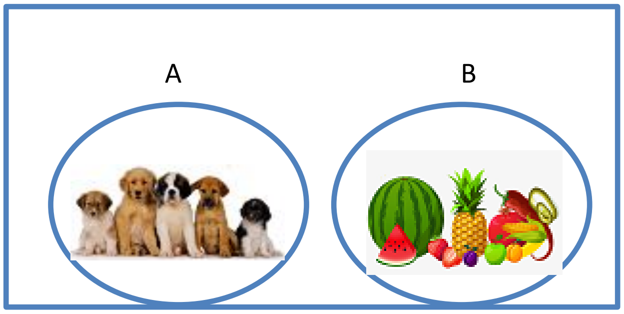


Figura 10. Conjunto disjuntos

2.9. Operaciones entre conjuntos

Las operaciones básicas con conjuntos también conocidas como álgebra de conjuntos, nos permiten realizar operaciones sobre conjuntos para obtener otro conjunto. De las operaciones con conjuntos veremos las siguientes: unión, intersección, diferencia, complemento de un conjunto, cardinalidad de un conjunto por diagramas de Venn.

"Las operaciones entre conjuntos y algunas de sus más importantes propiedades se incluyen en las denominadas leyes de álgebra de conjuntos, se encarga de definir las operaciones, reglas y propiedades que podemos aplicar a los conjuntos" (Duarte, 2017).

2.9.1. Unión entre conjuntos

Unión $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ se lee A unión B y es el conjunto formado por la totalidad de elementos de A y de B. "Es la unión de los elementos de dos o más conjuntos, formando un nuevo conjunto cuyos elementos son los elementos de los conjuntos originales, pero cuando un elemento se repite, dicho elemento entrará a formar parte del conjunto unión una sola vez" (Martínez, 2014). "La unión es la combinación y el traslado de los elementos de cada conjunto, formando en sí uno nuevo" (Guzmán, 2017).

Ejemplo:

$$A = \{ 1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{ 5,6,7,8,9 \}$$
$$A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, ,6,7,8,9 \}$$
$$\text{Unión: } \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{x} \in \mathbf{B}\}$$
$$\text{Foralmente: } A \cup B = \{ x \mid x \in A \; o \; bien \in B \}$$
$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \text{ está formado por los elementos que están en A o en B}$$

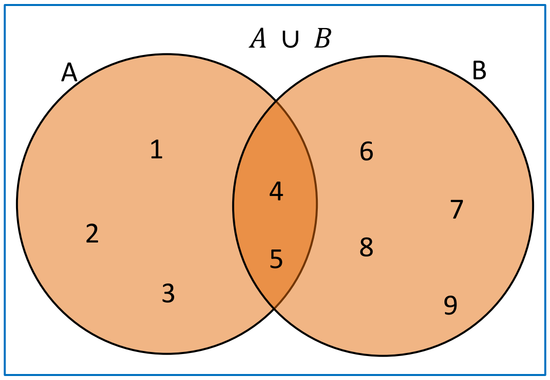


Figura 11. Unión de conjuntos

2.9.2. Intersección entre conjuntos

La intersección de dos conjuntos es otro conjunto formado solamente por elementos que pertenecen a los dos conjuntos a la vez. “Se llama intersección de dos conjuntos de A y B y se representa por $A \cup B$ al que tiene por elementos todos los elementos comunes” (Ivorra, 2013).

Si $A \cup B$=$\emptyset$ A y B son disjuntos.

“La intersección de dos conjuntos es el conjunto de sus elementos comunes, los elementos que están a la vez en los dos, que pertenecen a ambos” (Escande, 2013).

Simbólicamente $A \cap B = \{x, tales\ que\ x \in y\ x \in B\}$

Son evidentes las siguientes propiedades de la unión:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cup \emptyset = \emptyset$$
$$A \cup A^C = \emptyset$$
$$Si\ B \subset A\ entonces\ A \cup B = B.$$

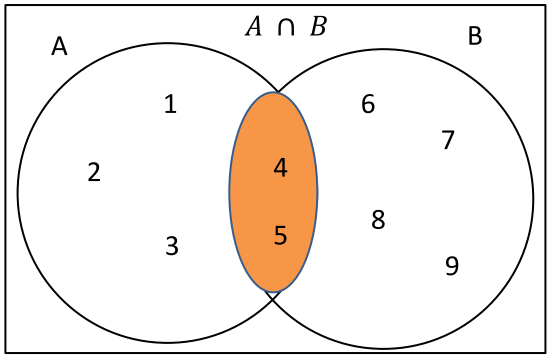


Figura 12. Intersección de conjuntos

2.9.3. Diferencia de conjuntos

La diferencia de dos conjuntos $A\ y\ B$, que se denota por $A - B$, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A, pero no a B (elementos de A que no son de B).

"Se denomina diferencia de conjuntos aquella operación que da a luz un conjunto formado por los elementos de un primer conjunto que no pertenezcan al segundo" (García, 2015). "Es el conjunto formado por todos los elementos del primer conjunto, pero que no pertenecen al segundo conjunto" (Ángel, 2013).

Simbólicamente:

$$A - B = \{x, tales\ x \in x \notin B\}$$

$$\text{Igualmente, } B = \{ x, x \in x \notin A \}$$

$$\text{Es } A \cap B = (AB) \cap (A \cup B) \cap (BA)$$

Ejemplo:

A= {1, 2, 3, 4,5}

B= {4, 5, 6, 7, 8,9}

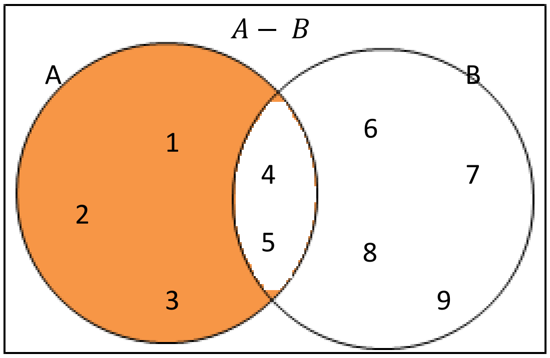


Figura 13. Diferencia de conjuntos

2.9.4. Complemento de un conjunto

Dado un conjunto universal U y un conjunto A, se llama complemento de A al conjunto formado por todos los elementos del universo que no pertenecen al conjunto A, se denota el complemento de A por $A', Ac, \bar{A}$. Según Ortega (2013): "El complemento de un conjunto es aquello que falta al conjunto para ser igual al conjunto universal".

"Es conocido como aquella colección en donde se puede hallar el universo pleno de elementos, es decir, se puede establecer un conjunto en donde se cuentan como elementos todos aquellos que no aparecen en el conjunto dado en el primer momento" (Guzmán, 2017).

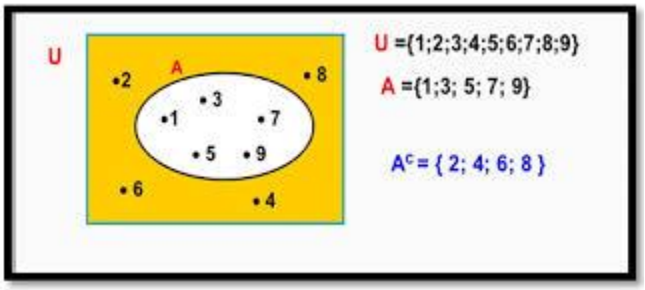


Figura 14. Complemento de un conjunto

2.9.5. Cardinalidad de un conjunto por Diagramas de Venn

La cardinalidad es el número de elementos que posee o le pertenecen a un conjunto. El uso de los diagramas de Venn para la representación de la cardinalidad de un conjunto es preciso.

"La cardinalidad de conjuntos por diagramas de Venn me permite representar de manera más clara la cantidad de elementos de mi conjunto finito" (Castillo, 2016).

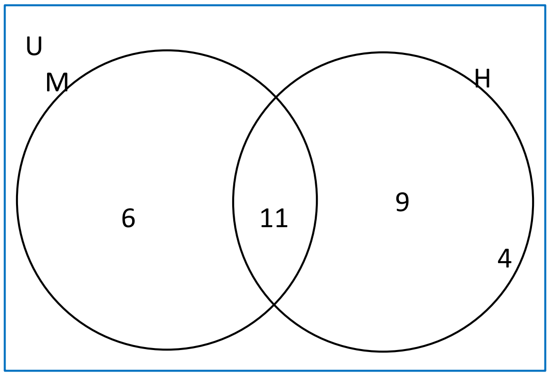
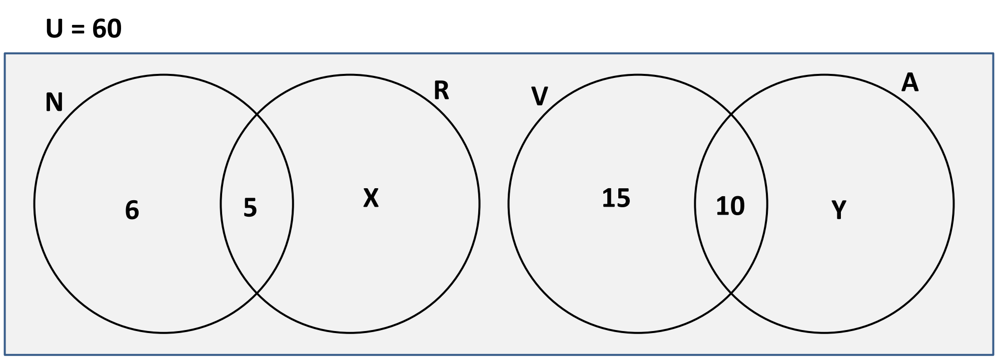


Figura 15. Cardinalidad por diagramas de Venn

Capítulo 3. Ejercicios

En una caja hay 60 bolas de colores rojo, negro, verde y azul, de las cuales 6 bolas son negras, 5 bolas rojas y negras, solo 15 bolas verdes, 10 bolas verdes y azul. Determine:

- La cantidad de bolas azules, teniendo en cuenta que el total de bolas de color azules es igual al doble de bolas de color rojo.
- ¿Cuántas bolas de color rojo hay?



Resolución: para esta resolución es necesario utilizar y dominar los sistemas de ecuaciones.

Primer paso
Se realizan dos ecuaciones matemáticas usando la teoría conjuntos.

$$U = (N \cup R) \cup (V \cup A)$$
$$60 = (6 + 5 + x) + (15 + 10 + y)$$
$$60 = x + y + 11 + 25$$
$$60 = x + y + 36$$
$$x + y = 60 - 36$$
$$x + y = 24$$

Segundo paso
Se utiliza la información dada para hallar la cantidad de bolas azules.

$$A = 2R$$
$$10 + y = 2(5 + x)$$
$$10 + y = 10 + 2x$$
$$2x - y = 0$$

Tercer paso
Utilizando las ecuaciones anteriormente halladas se forma un sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{r} x + y = 24 \\ 2x - y = 0 \\ \hline 3x = 24 \end{array}$$

Una vez hallado el resultado se procede a despejar *x*.

$$x = \frac{24}{3} = 8$$

$$x = 8$$

La *x* son las bolas que son solo rojas.
Por tanto, hay 8 bolas que son solo rojas.

Cuarto paso
Para hallar *y* tan solo se reemplaza la x en cualquiera de las ecuaciones halladas anteriormente.

$$x + y = 24$$
$$8 + y = 24$$
$$y = 24 - 8$$
$$y = 16$$

La *y* son las bolas que son solo azules.
Por tanto, hay 16 bolas que son solo azules.

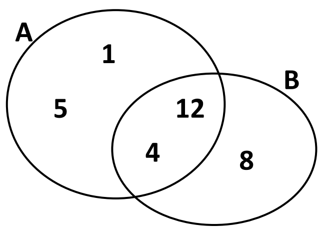
Respuestas:

- Hay 26 bolas de color azul, independiente de que sean solo azules o combinadas con otros colores.
- Hay 8 bolas que son solo rojas.

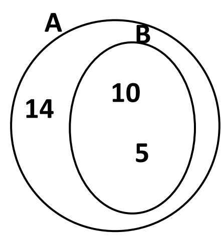
3.1. Ejercicios sobre teoría de conjuntos

Ejercicio 1. Teniendo en cuenta los siguientes diagramas de Venn, expresa por extensión y por comprensión los conjuntos A y B y compáralos según la relación de inclusión.

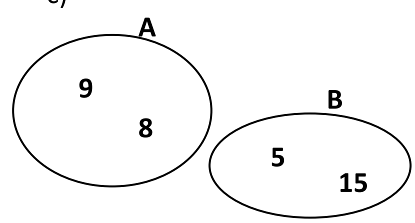
a)



b)



c)



Por Extensión. Literal A

$P\ =\ \{1, 4, 5, 12\}$
$Q\ =\ \{4, 8, 12\}$

Por Comprensión. Literal A

$V\ =\ \{x / x \in A \cup B\ <=>\ x \in A\ o\ x \in B\}$

Por Extensión. Literal B

$P\ =\ \{5, 10, 14\}$
$Q\ =\ \{5, 14\}$

Por Comprensión. Literal B

$V\ =\ \{x / x \in A\ <=> B\ \subset\ A\ =>\ x \in B\}$

Por Extensión. Literal C

$P\ =\ \{8, 9\}$

$Q = \{5, 15\}$

Por Extensión. Literal C

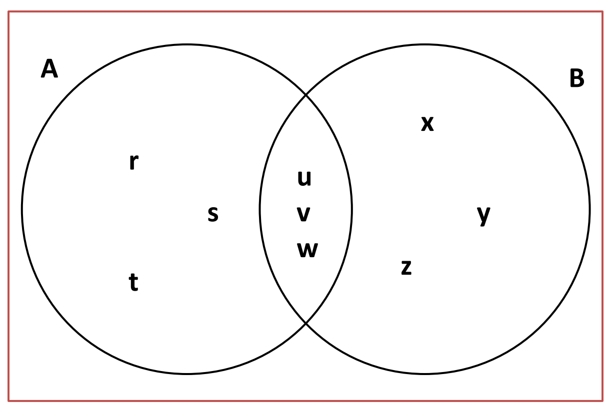
$V = \{x / x \in A <=> A \not\subset B\}$
$V = \{x / x \in A <=> B \not\subset A\}$

Ejercicio 2. Sean los conjuntos:

$\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{r, s, t, u, v, w}\}$, $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{u, v, w, x, y, z}\}$, $\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{s, u, y, z}\}$, $\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{u, v}\}$, $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{s, u}\}$ y $\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{s}\}$.

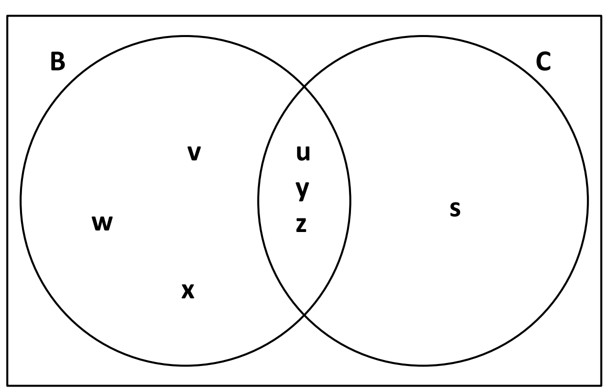
Determina en cada caso, con las informaciones dadas y con ayuda de un diagrama de Venn, cuál de los conjuntos dados es X.

a)



$X \subset A$ y $X \subset B$
$x = \{u, v, w\}$

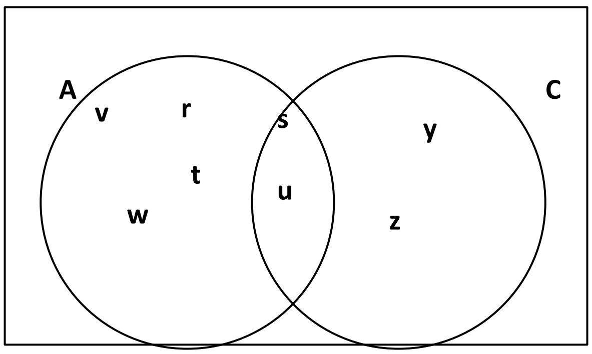
b)



$X \not\subset B$ y $X \subset C$

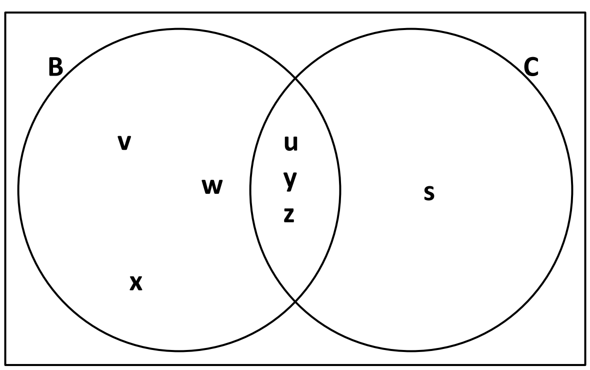
x = {s}

c)



X ⊄ A y X ⊄ C
x = { }

d)



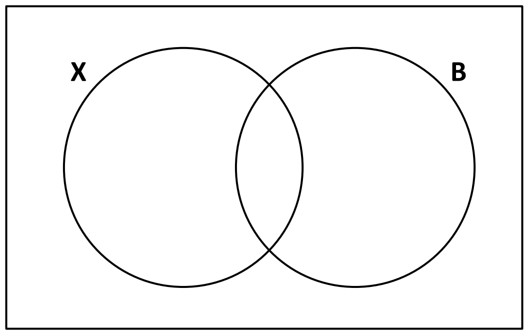
X ⊂ A y X ⊄ C
x = {v, w, z}

Ejercicio 3. Sean los conjuntos:

$\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1,2,3,4,5,6,7,8,9}\}$, $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{2,4,6,8}\}$, $\boldsymbol{C} = \{\mathbf{1,3,5,7,9}\}$, $\boldsymbol{D} = \{\mathbf{3,4,5}\}$, $\boldsymbol{E} = \{\mathbf{3,5}\}$ y $\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{s}\}$.

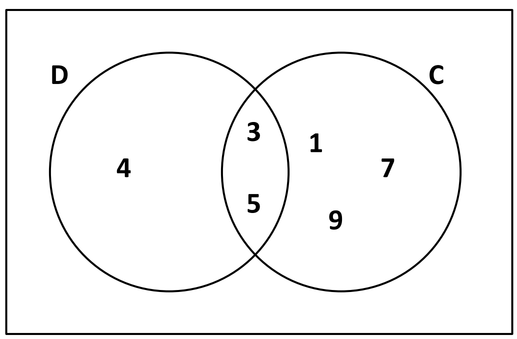
Determina en cada caso, con las informaciones dadas y con ayuda de un diagrama de Venn, cuál de los conjuntos dados es X:

a)



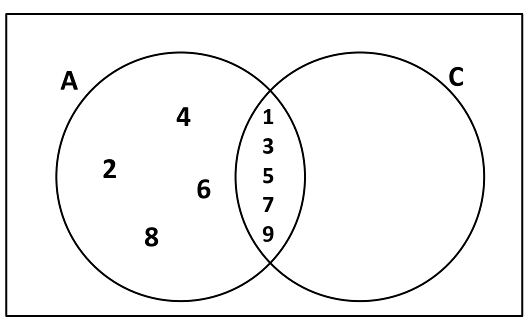
$X \ y \ B \ son \ disjuntos$

b)



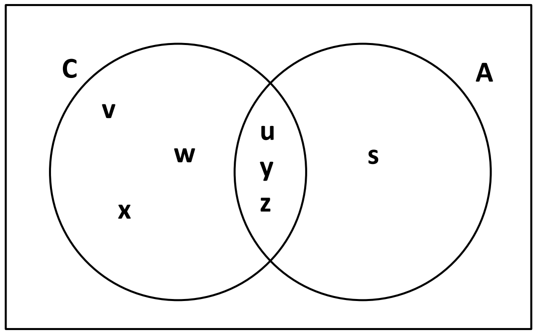
$$X \subset D \ y \ X \not\subset C$$
$$x = \{4\}$$

c)



$$X \subset A \ y \ X \not\subset C$$
$$x = \{2, 4, 6, 8\}$$

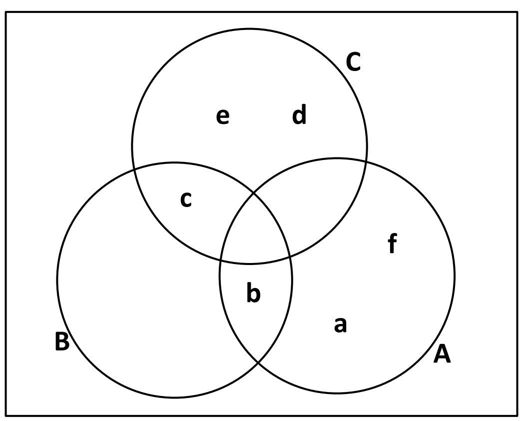
d)



$$X \subset C \; y \; X \not\subset A$$
$$x = \{\,\}$$

Ejercicio 4. Sean A, B y C tales que $A \subset B$ y $B \subset C$ .Suponiendo que $a \notin A, b \notin B$ y $d \notin A, e \in B \; y \; f \in C$, ¿Cuáles de las siguientes informaciones son ciertas?

a) a∈C **b)** b∈A **c)** c∉A **d)** d∉B **e)** e∉A **f)** f∈A



$$Literales\ correctos: b - c - e$$

Ejercicio 5. Consideremos los conjuntos A = {x ϵ IN/2≤ x ≤9}, B = {2, 4, 6, 8}, C = {3, 5, 7}, D = {2, 4} y E = {1, 3}. Indica en cada caso, cuál de estos conjuntos puede ser el conjunto X.

a) $X \subset A \; y \; X \subset B$ $x = \{2, 4, 6, 8\}$
b) $X \not\subset B \; y \; X \not\subset E$ $x = \{\,\}$

c) $X \not\subset C \; y \; X \subset D$ $\quad x = \{2, 4\}$
d) $X \not\subset A \; y \; X \subset E$ $\quad x = \{1\}$
e) $X \subset A \; y \; X \subset E$ $\quad x = \{3\}$

3.2. Ejercicios sobre operaciones de conjuntos

Ejercicio 1. Sea U = {1, 2, 3, 4, 5,…, 12} el conjunto universal. Consideremos los subconjuntos, A = {1, 3, 5, 7, 9, 11}, B = {2, 3, 5, 7, 11}, D = {2, 4, 8} y C = {2, 3, 6, 12}. Determina los conjuntos.

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11\}$
b) $A \cap C = \{3\}$
c) $(A \cup B) = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11\}$
$C' = \{1, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$
$(A \cup B) \cap C' = \{1, 5, 7, 9, 11\}$
d) $A - B = \{1, 9\}$
e) $C - D = \{3, 6, 12\}$
f) $(B - D) = \{3, 5, 7, 11\}$
$(D - B) = \{4, 8\}$
$(B - D) \cup (D - B) = \{3, 4, 5, 7, 8, 11\}$

Ejercicio 2. Sean A = {x ϵ IR/-2< x ≤10} y B = {x ϵ IR/x >1}. Expresa dichos conjuntos mediante intervalos y calcula la unión, la intersección y la diferencia de uno con el otro. Calcula además, los complementarios y comprueba que se cumplen las leyes de De Morgan.

$A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
$B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots, n\}$

a) $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
b) $A \cap B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
c) $A - B = \{-1, 0, 1\}$
d) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
$\{11, 12, 13, \dots, n\} = \{11, 12, 13, \dots, n\} \cap \{-1, 0, 1, \dots, 11, 12, 13, \dots, n\}$
$\{11, 12, 13, \dots, n\} = \{11, 12, 13, \dots, n\}$

Ejercicio 3. Sean A = $\{x \in IR / \frac{1}{x-1} \geq\}$ y B = $\{x \in IR / x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$.

Expresa dichos conjuntos mediante intervalos y calcula la unión, la intersección y la diferencia de uno con el otro. Calcula además, los complementario y comprueba que se cumplen las leyes de De Morgan.

$A = \{1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, \ldots, n\}$
$B = \{3, 0, -1, 8, 15, 24, \ldots, n\}$

a) $A \cup B = \{-1, 0, 1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, \ldots, n, 3, 8\ 15, 24, \ldots, n\}$
b) $A \cap B = \{\ \}$
c) $A - B = \{1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, \ldots, n\}$
d) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
$\{1/8, 1/9, 1/10, \ldots, n, 35, \ldots, n\} = \{1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, \ldots, n\}$

3.3. Ejercicios sobre problemas con conjuntos

Ejercicio 1. Se realizó una encuesta a 11 profesores de la carrera Ingeniería en networking de la Universidad de Guayaquil. Se interrogó sobre sus preferencias por dos marcas de Routers: Ubiquiti y TP-Link. Se obtuvieron los siguientes resultados: 7 profesores prefirieron uno solo de los productos; el número de los profesores que prefirieron ambas marcas fue igual al número de profesores que no prefirió ninguna de las dos marcas; el número de los profesores que no prefirieren la marca Ubiquiti y prefirieron la marca TP-Link fueron 3.

Se desea saber:

- ¿Cuántos profesores prefieren el router de marca Ubiquiti?
- ¿Cuántos profesores prefieren solamente el router de marca TP-Link?
- ¿Cuántos profesores prefieren ambas marcas?

Respuestas:

- Profesores prefieren el router de marca Ubiquiti.
- Profesores prefieren solamente el router de marca TP-Link.
- Profesores prefieren ambas marcas

Ejercicio 2. Se le pregunto a un grupo de 1o estudiantes de la carrera Medicina de la Universidad de Guayaquil sobre sus preferencias por dos laboratorios de medicamentos: Genfar y Abbott. Se obtuvieron los siguientes resultados: el número de estudiantes que prefirieron Genfar, pero no Abbott fue de 3; el número de estudiantes que no prefirieron Genfar fue 6.

Se desea saber:

- ¿Cuántos de los encuestados prefirieron Genfar?

- ¿Cuántos de los encuestados prefirieron Abbott?
- ¿Cuántos de los encuestados prefirieron Genfar o Abbott?

Respuestas:

- 3 Encuestados prefirieron Genfar.
- 6 Encuestados prefirieron Abbott.
- 1 Encuestado prefirieron Genfar o Abbott.

Ejercicio 3. Determina el número de alumnos de un aula de la carrera Ingeniería en sistemas computacionales de la Universidad de Guayaquil. Si se sabe que cada uno participa en al menos uno de los tres seminarios de ampliación de las siguientes materias: Programación, Base de Datos o Redes. 48 participan en el de Programación, 45 en el de Base de Datos, 49 en el de Redes, 28 en el de Programación y Base de Datos, 26 en el de Programación y Redes, 28 en el de Base de Datos y redes y 18 en los tres seminarios.

Determinar:

- ¿Cuántos alumnos participan en los seminarios de Base de Datos y Programación pero no en el de Redes?
- ¿Cuántos participan solo en el de Redes?

Respuestas:

- 10 alumnos participan en los seminarios de Base de Datos y Programación, pero no en Redes.
- 13 participan solo en el de Redes.

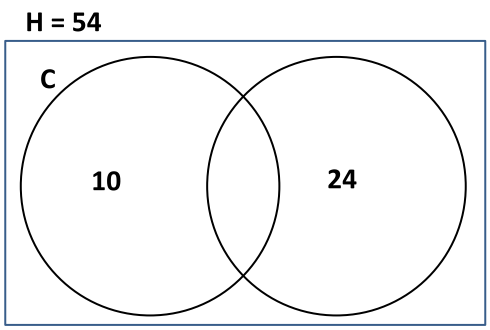
Ejercicio 4. Observación: se encuesta a 100 profesores de la Universidad de Guayaquil y se obtiene la siguiente información: todo encuestado que es propietario de automóvil, también lo es de una casa. 54 encuestados son hombres, 30 de los encuestados que son hombres no son propietarios de un automóvil. 30 de los encuestados que son mujeres son propietarias de una casa, 5 de los encuestados que son mujeres son solamente propietarias de una casa, 15 encuestados que son propietarios de una casa no lo son automóvil.

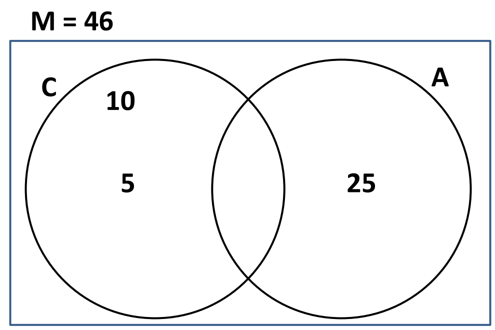
Realice un diagrama adecuado a la situación e indique la cardinalidad correspondiente a cada región.

- ¿Cuántos encuestados que son hombres son solamente propietarios de casa?
- ¿Cuántas mujeres no son propietarias de casa?

Respuestas:

Diagramas de los encuestados.





N(H) = 10 => solamente tienen casa.
N(H) = 24 => solamente tienen auto.
N(H) = 20 => no tienen casa ni auto.

N(M) = 5 => solamente tienen casa.
N(M) = 25 => solamente tienen auto.
N(M) = 16 => no tienen casa ni auto.

- 10 Encuestados que son hombres son propietarios de casa.
- 16 mujeres no son propietarios de casa.

Capítulo 4. Introducción al estudio de la probabilidad

El principio básico de conteo consiste en que si un grupo tiene *m* elementos y otro grupo tiene *n* elementos, entonces existen *(m x n)* formas diferentes de tomar un elemento del primer grupo y otro elemento del segundo grupo. Según González (2017) “Los principios básicos para contar elementos de un conjunto son el de adición, el de multiplicación, el de inclusión-exclusión y el de distribución”.

Técnicas de Conteo

Regla multiplicativa

Si se tiene “K” tareas o actividades, y la tarea “i” se puede realizar de “ni” formas; entonces el total de maneras diferentes de hacer las “K” tareas de manera simultánea. En este sentido, González (2017) comenta que “… si un procedimiento puede descomponerse en las etapas primera y segunda, y si existen *m* resultados posibles de la primera etapa, y si para cada uno de estos resultados existen *n* resultados posibles para la segunda etapa; entonces el procedimiento entero puede realizarse en el orden dado, de *mn* formas”.

Combinación

La combinación son los arreglos que se pueden hacer con los elementos de un conjunto considerando que el orden de los elementos en cada arreglo no es de interés. Cada arreglo se diferencia únicamente por los elementos que contiene, sin importar su ubicación. Según Mario (2016) “… es el número de maneras en las que r objetos pueden seleccionarse a partir de n cosas, sin considerar el orden”.

Permutaciones

Son los arreglos diferentes que se pueden hacer con los elementos de un grupo, en estos arreglos se debe considerar el orden de los elementos incluidos. Para Suárez (2017) es “… el número de maneras para arreglar r objetos seleccionados a la vez de n objetos en orden”.

Experimento estadístico y espacio muestral

Experimento

El experimento es un conjunto de acciones con las que utilizando procedimientos claramente establecidos se efectúa algún tipo de observación medida. Suárez (2017) plantea que “… es toda acción sobre la cual vamos a realizar una medición u observación, es decir, cualquier proceso que genera un resultado definido”.

Espacio muestral de experimento

Se denomina así al par (Ω, £), donde:

a) Ω es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento.

b) £ es el conjunto potencia de Ω, esto es, £ es el conjunto de todos los subconjuntos de Ω, y es denominado espacio de eventos.

Suárez (2017) argumenta que "… es un conjunto de todos los resultados posibles que se pueden obtener al realizar un experimento aleatorio".

Eventos

Un evento es algún subconjunto del espacio muestral S. Se pueden usar letras mayúsculas para denotar eventos: A, B,. . . También se pueden usar índices E1, E2,. . . Suárez (2017), afirma que "… es todo subconjunto de un espacio muestral".

Función de probabilidad

Una función p cuyo dominio es £ y cuyo conjunto de alegada es el intervalo cerrado de números reales de cero a uno, es una función de probabilidad. Suárez (2017) plantea que "… es el conjunto de posibilidades de que un evento ocurra o no en un momento y tiempo determinado".

Ley del complemento

Es utilizada para determinar la probabilidad de que un evento ocurra, restando a 1 la probabilidad de que no ocurra dicho evento.

Ley aditiva de probabilidad

Si P es una función de probabilidades y E1 y E2 son eventos en el correspondiente espacio muestral (Ω, £), entonces P (E1UE2)= P (E1)+ P (E2)-(PE1 ∩E2). García (2016) complementa que "… si dos eventos A y B son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra uno u otro evento, es igual a la suma de sus probabilidades".

Probabilidad condicional

Sea A y B evento de Ω la probabilidad condicional del evento A dado el evento B, se escribe P(A/B) y eso es igual a:

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; P(B) \neq 0$$

Argumenta Moya (2017) que "… es la probabilidad de que ocurra un evento A sabiendo que también ocurre un evento B".

Independencia de evento

Sean E1 y E2 dos eventos definidos sobre el espacio muestral (Ω, £). E1 y E2 son dos eventos independientes si y solamente si:

$$P(E1 \cap E2) = P(E1)P(E2)$$

Suárez (2017) explica que "… si A y B son dos eventos independientes, es decir, si el conocimiento de la incidencia de uno de ellos no tiene efecto en la probabilidad de ocurrencia del otro".

Regla multiplicativa condicional

Sea A y B evento no nulo de Ω entonces de la probabilidad de que el primer evento ocurra y el segundo evento sea igual dado que:

$$P(A \cap B) = P(A) * P\left({}^{B}/_{A}\right)$$

García (2016) determina que "… dos eventos A y B son independientes si la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad que ocurra el otro".

Evento mutuamente excluyente

Que los eventos A y B son mutuamente excluyente esto significa que si se da el suceso A, no puede darse el suceso B, es decir, que cuando 2 o más eventos no pueden suceder al mismo tiempo, la suma de sus probabilidades individuales es la probabilidad que el evento ocurra. García (2016) afirma que "…la ocurrencia de cualquiera significa que ninguno de los otros puede ocurrir al mismo tiempo".

Teorema de probabilidad total

Sean E1, E2,…, ER (eventos) definidos sobre el espacio muestral $P(Ei) \neq 0$. Sea un evento cualquiera entonces se puede calcular es la P(A) y está dado por la fórmula de probabilidad total. Valdez (2017) dice que "… la probabilidad total del evento B puede expresarse como la suma de las intersecciones del evento B con los evento Ai".

Teorema de Bayes

Vincula la probabilidad de A dado B con la probabilidad de B dado A. Sea $\{A1, A2, \ldots, Ai, \ldots An\}$ un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos, y tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero (0). Sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$. Suárez (2017) plantea que "… el teorema de Bayes se utiliza para revisar probabilidades previamente calculadas cuando se posee nueva información".

Distribución binomial

Es una distribución de probabilidad discreta que cuenta el número de éxitos en una secuencia de n ensayos de Bernoulli independientes entre sí, con una probabilidad fija p de ocurrencia del éxito entre los ensayos. Según Suárez (2017) "… es uno de los modelos matemáticos (expresión matemática para representar una variable) que se utiliza cuando la variable aleatoria discreta es el número de éxitos en una muestra compuesta por n observaciones".

Distribución binomial negativa

Esta distribución puede considerarse como una extensión o ampliación de la distribución geométrica. La distribución binomial negativa es un modelo adecuado para tratar aquellos procesos en los que se repite un determinado ensayo o prueba hasta conseguir un número determinado de resultados favorables (por vez primera). Maronna (2016) afirma que "… es la distribución de número del intento correspondiente al mésimo éxito en un esquema de Bernouilli".

Distribución geométrica

La distribución geométrica es un modelo adecuado para aquellos procesos en los que se repiten pruebas hasta la consecución del éxito a resultado deseado y tiene interesantes aplicaciones en los muestreos realizados de esta manera. Comenta Maronna (2018) que "… es la distribución del número del intento en que se da por primera vez un éxito en el esquema de Bernouilli".

Distribución hipergeométrica

Es una distribución discreta relacionada con muestreos y sin reemplazo. Según Suárez (2017): "… si la población es pequeña y ocurre sin reemplazo, la probabilidad de éxito variará, y la distribución hipergeométrica es que se utiliza".

Distribución de Poisson

Expresa, a partir de una frecuencia de ocurrencia media, la probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos durante cierto período de tiempo. Suárez (2017) afirma que "… se basa en el conteo de las veces que se presenta un evento dentro de un área de oportunidad dada".

Variables aleatorias continuas

Una variable aleatoria X es continua si su función de distribución es una función continua. Waner (2018) planteó que "… una variable aleatoria continua es una función X que asigna a cada resultado posible de un experimento un número real".

Distribución acumulada

Es la probabilidad de que la variable X sea menor o igual al valor x. Para Waner (2018) "… es la distribución de la variable que resulta de sumar las probabilidades anteriores y la propia".

Distribución uniforme continua

Todos los intervalos de igual longitud en la distribución en su rango son igualmente probables. Suárez (2017) afirmó que "…es una distribución en el intervalo $[a, b]$ en la cual las probabilidades son las mismas para todos los posibles resultados, desde el mínimo de a hasta el máximo de b".

Función Gamma

Según Sabadías (2018) "… sirve para numerosos modelos en donde interviene el tiempo". Una variable aleatoria x tiene distribución gamma si su densidad de probabilidad está dada por:

$$F(x) = \frac{k^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-kx}$$

Capítulo 5. Ejercicios a partir de variables bases

En el presente capítulo se desarrollan diversos ejercicios a partir de las variables bases siguientes: edad, sexo, trabajo, nivel o semestre, carrera y porcentaje de calificación a la UG.

5.1. Combinaciones

Edad

- De un grupo de estudiantes que están entre 18 y 21 años, se desea realizar una elección de presidente y 2 vicepresidentes. Teniendo en cuenta que solo una persona puede tener el cargo de presidente.

$$n = 89$$
$$Presidente\ \binom{89}{1}$$
$$Vicepresidente\ \binom{88}{2}$$
$$C_1^{89} * C_2^{88} = \frac{89!}{1!(89-1)!} * \frac{88!}{2!(88-2)!}$$
$$\frac{89 * 88!}{88!} * \frac{88 * 87 * 86!}{2! * 86!}$$
$$89 * 3828 = 340692$$

R: / Existen 340692 combinaciones posibles de tener 1 presidente y dos vicepresidentes.

- Un grupo de estudiantes de 4 carreras tienen entre 18 y 19 años. Se desea elegir a una reina de belleza, señorita universidad y 4 madrinas que representen a la facultades. No existe ningún inconveniente si se repiten entre carreras.

$$n = 52$$
$$Reina\ \binom{52}{1}$$
$$Señorita\ Universidad\ \binom{51}{1}$$
$$Madrinas\ \binom{50}{4}$$
$$C_1^{52} * C_1^{51} * C_4^{50} = \frac{52!}{1!(52-1)!} * \frac{51!}{1!(51-1)!} * \frac{50!}{4!(50-4)!}$$
$$\frac{51 * 51!}{51!} * \frac{51 * 50!}{50!} * \frac{50 * 49 * 48 * 47 * 46!}{4! * 46!}$$
$$52 * 51 * 230300 = 610755600$$

R: / Existen 610755600 combinaciones posibles de tener 1 reina, 1 señorita universidad y las 4 madrinas.

Sexo

- De un grupo de hombres de entre 26 y 35 años se desea elegir 5 representantes para un concurso de conocimiento general en carreras técnicas.

$$n = 16$$
$$Representantes\ \binom{16}{5}$$
$$C_5^{16} = \frac{16!}{5!(16-5)!}$$
$$\frac{16 * 15 * 14 * 13 * 12 * 11!}{5! * 11!} = 4368$$

R: / Existen 4368 combinaciones posibles de elegir a estos representantes.

- A las estudiantes de sexo femenino, de Teleinformática, se le necesita realizar una entrevista de trabajo para ocupar 3 cargos permanentes y 2 a prueba.

$$n = 15$$
$$Permanente\ \binom{15}{3}$$
$$Prueba\ \binom{12}{2}$$
$$C_3^{15} * C_2^{12} = \frac{15!}{3!(15-3)!} * \frac{12!}{2!(12-2)!}$$
$$\frac{15 * 14 * 13 * 12!}{3! * 12!} * \frac{12 * 11 * 10!}{2! * 10!}$$
$$455 * 66 = 30030$$

R: / Existen 30030 combinaciones posibles de tener 3 señoritas en el cargo permanente y 2 a prueba.

Trabajo

- El grupo de chicos de 25 años, que trabajan en las 4 carreras, se someten a un examen de recuperación teniendo en cuenta que se van a realizar 3 grupos. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden armar los 3 grupos?

$$n = 13$$
$$Grupos\ \binom{13}{3}$$
$$C_3^{13} = \frac{13!}{3!(13-3)!}$$
$$\frac{13 * 12 * 11 * 10!}{3! * 10!} = 286$$

R: / Existen 286 combinaciones posibles de realizar los 3 grupos de exámenes de recuperación.

- De los chicos que no trabajan, se desean elegir a 3 de ellos que estén entre los 18 y 20 años, para un seminario sobre seguridad de información. Asimismo, se desean elegir 4 de la misma edad, entre los que sí trabajan.

$$n1 = no\ trabajan = 34$$
$$n2 = si\ trabajan = 20$$
$$No\ Trabajan\ \binom{34}{3}$$
$$Trabajan \binom{20}{4}$$
$$C_3^{34} * \ C_4^{20} \frac{34!}{3!(34-3)!} * \frac{20!}{4!(20-4)!}$$
$$\frac{34*33*32*31!}{3!*31!} * \frac{20*19*18*17*16!}{4!*16!}$$
$$5984 * 4845 = 28992480$$

R: / Existen 28992480 combinaciones posibles de elegir, para este seminario, a los chicos que trabajan y a los que no trabajan.

Nivel

De los estudiantes CINT todos los que están en 4to. Nivel, se requieren 5 estudiantes para realizar pasantías. ¿De cuántas formas posibles se pueden elegir a los estudiantes?

$$n = 7$$
$$Pasantes\ \binom{7}{5}$$
$$C_5^7 = \frac{7!}{5!(7-5)!}$$
$$\frac{7*6*5!}{5!*2!} = 21$$

R: / Existen 21 combinaciones posibles obtener los 5 estudiantes para realizar pasantías.

- Se va realizar una mañana deportiva por parte de la carrera Licenciatura en Sistema. Para ello se van a elegir 3 cargos a nivel de certamen de belleza. ¿De cuántas formas posibles se puede realizar la elección?

$$n = 10$$
$$Cargo\ 1\ \binom{10}{1}$$

$Cargo\ 2\ \binom{9}{1}$

$Cargo\ 3\ \binom{8}{1}$

$$C_1^{10} * C_1^{9} * C_1^{8} = \frac{10!}{1!(10-1)!} * \frac{9!}{1!(9-1)!} * \frac{8!}{1!(8-1)!}$$

$$\frac{10 * 9!}{1! * 9!} * \frac{9 * 8!}{1 * 8!} * \frac{8 * 7!}{1! * 7!}$$

$$10 * 9 * 8 = 720$$

R: / Existen 720 combinaciones posibles elegir los tres cargos a nivel de certamen de belleza.

Carrera

De los alumnos del L4J de Teleinformática, se quiere elegir un comité formado por 3 alumnos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?

$$C_3^{29} = \frac{29!}{3! * 26!} = \frac{29 * 28 * 27 * 26!}{3! * 26!} = 3654$$

R: / Existe 3654 combinaciones posibles para poder formar el comité de alumnos del L4J.

Calificación de la UG

- Entre los alumnos que calificaron para la Universidad de Guayaquil con porcentaje de 40% o menos, se quiere escoger a un representante por cada grupo (0-20; 20-40) para que aporte posibles sugerencias para mejorar. ¿Cuántos grupos diferentes se pueden formar?

0% - 20% = 14

20% - 40% = 62

$$C_1^{14} * C_1^{62} = \frac{14!}{1!(14-1)!} * \frac{62!}{1!(62-1)!}$$

$$\frac{14 * 13!}{1! * 13!} * \frac{62 * 61!}{1 * 61!}$$

$$14 * 62 = 868$$

R: / Existen 868 posibles combinaciones en que se puede recibir posibles sugerencias para la mejora de la calificación de la UG.

5.2. Permutaciones

Edad

Se tiene este rango de edades entre los encuestados.

EDAD	CANTIDAD
18-19	22
20-21	67
22-23	52
24-25	36
26-27	13
28-29	3
30-31	3
32-33	1
34-35	2
36-38	1

- De cuántas formas posibles se puede ordenar las encuestas, si se considera que tiene que ser en grupo de dos.

$$n = 10$$

$$Grupos\ \binom{10}{2}$$

$$P_2^{10} = \frac{10!}{(10-2)!}$$

$$\frac{10*9*8!}{8!} = 90$$

R: / Existen 90 formas de ordenar las encuestas en grupo de dos.

- De cuántas formas posibles se pueden ordenar las encuestas, si se eligen 3 rangos de edades a la vez.

$$n = 10$$

$$Ordenar\ \binom{10}{3}$$

$$P_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!}$$

$$\frac{10*9*8*7!}{7!} = 720$$

R: / Existen 720 formas de ordenar las encuestas para tener 3 grupos de encuestas a la vez.

Nivel

De cuántas formas diferentes se pueden ordenar la encuestas por niveles, si se considera que se tienen que colocar dos grupos unidos.

$$n = 3$$

$$Pasantes \binom{3}{2}$$

$$P_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!}$$

$$\frac{3 * 2 * 1!}{1!} = 6$$

R: /Es posible ordenarlas de 6 maneras diferentes manteniendo el orden de las dos encuestas juntas.

- De cuántas formas posibles se puede ordenar 1 rango de un total de 3, si se considera que tienen que ir de menor a mayor y viceversa.

$$n = 3$$

$$Rango \binom{3}{1}$$

$$P_1^{10} = \frac{3!}{(3-1)!}$$

$$\frac{3 * 2!}{2!} = 3$$

R: / Existen 3 formas posibles de ordenar las encuestas de los niveles de mayor a menor.

Carrera

- De la carrera Teleinformática se ha convocado al presidente de cada curso para una reunión con el decano. Si se sientan en un fila de sillas, ¿de cuántas maneras distintas pueden sentarse?

$$P6 = 6! = 720$$

R: /Existen 720 formas diferentes de poder sentarse los presidentes convocados.

5.3. Probabilidad Condicional

Nivel

- De las encuestas realizadas en la Carrera Ingeniería en Teleinformática, se conoce que 4 estudiantes tienen la edad de 20 años y 5 están en 4to semestre. Se conoce también que 2 tienen la edad de 20 años y están en 4to semestre. Encuentre la probabilidad de:

a) Los que no están en 4to semestre y tengan 20 años.
b) Los que estén en 4to semestre, pero no tengan 20 años.
c) Los que tengan 20 años dado que no están en 4to semestre.

	20 años	(20 años)'	Total
4to semestre	2(0,08)	3(0,12)	5(0,2)
(4to semestre)'	2(0,08)	18(0,72)	20(0,8)
Total	4(0,16)	21(0,84)	25

4to → A
20 años → B

Desarrollo

Literal (a)

$$P(A^c \cup B) = P(A^c) + P(B) - P(A^c \cap B)$$
$$P(A^c \cup B) = 0{,}8 + 0{,}16 - 0{,}08 = 0{,}88$$

Literal (b)

$$P(A \cap B^c) = 0{,}12$$

Literal (c)

$$P(B/A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{0{,}08}{0{,}8} = 0{,}1$$

Edad

- En la carrera técnica de CISC, 5 encuestados tienen 18 años de edad, 39 encuestados son del sexo masculino, y 1 es de sexo masculino y tiene 18 años. Encuentre la probabilidad de:

a) No tenga 18 años.
b) Tenga 18 años y no sea masculino.
c) Sea femenino dado que tenga 18 años.
d) Sea femenino pero no tenga 18 años.

18 años→A
M→Masculino
M'→F→Femenino

	A	A'	Total
M	0,01	0,41	0,42
F	0,04	0,54	0,58
Total	0,05	0,95	1

Desarrollo

Literal (a)

$$P(A^c) = 0.95$$

Literal (b)

$$P(A \cup F) = P(A) + P(F) - P(A \cap F)$$
$$= 0{,}05 + 0{,}58 - 0{,}04 = 0{,}59$$

Literal (c)

$$P(F/A) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}04}{0{,}05} = 0{,}8$$

Literal (d)

$$P(F \cap A^C) = 0{,}54$$

Sexo

- En la CINT de un total de 53 encuestados, se conoce que 25 encuestados no trabajan, que 23 son el total de encuestadas del sexo femenino, que 9 son féminas y sí trabajan. Encuentre la probabilidad de que:

a) No Trabajen.
b) No sean féminas y no trabajen.
c) No seas féminas dado que no trabajen.

Trabajan→A
M→Masculino
M'→F→Femenino

	A	A'	Total
M	0,16	0,4	0,56
F	0,35	0,08	0,43
Total	0,52	0,47	1

Desarrollo

Literal (a)

$$P(A^c) = 0.47$$

Literal (b)

$$P(M \cup A^C) = P(M) + P(A^C) - P(M \cap A^C)$$
$$= 0{,}43 + 0{,}47 - 0{,}08 = 0{,}82$$

Literal (c)

$$P(M/A^C) = \frac{P(M \cap A^C)}{P(A^C)} = \frac{0{,}08}{0{,}47} = 0{,}17$$

Trabaja

- Se conoce que 144 estudiantes de las carreras Ingeniería en Sistema Computacionales e Ingeniería en Networking fueron encuestados. Se conoce que 25 son de CINT y no trabajan, 53 sí trabajan y son de CISC, y que 63 no trabajan. Encuentre la probabilidad de que:

a) Sean de CISC.
b) Sean de CINT y trabajen
c) Sean de CSIC y no trabajen
d) Sí trabajen dado que son de CISC

T→Trabaja
T'→No Trabaja

	T	T'	Total
CISC	0,36	0,26	0,64
CINT	0,19	0,17	0,36
Total	0,56	0,43	1

Desarrollo

Literal (a)

$$P(CISC) = 0.64$$

Literal (b)

$$P(CINT \cup T) = P(CINT) + P(T) - P(CINT \cap T)$$
$$= 0{,}36 + 0{,}56 - 0{,}19 = 0{,}73$$

Literal (c)

$$P(CISC \cup T') = P(CISC) + P(T') - P(CISC \cap T')$$
$$= 0{,}64 + 0{,}43 - 0{,}26 = 0{,}81$$

Literal (d)

$$P(T/CISC) = \frac{P(T \cap CISC)}{P(CISC)} = \frac{0{,}36}{0{,}64} = 0{,}56$$

Carrera

- De los alumnos encuestados de 6to semestre de Ingeniería en Networking se seleccionan al azar simultáneamente dos de ellos, para el pizarrón. Calcule la probabilidad:

a) Los dos sean masculinos.
b) Al menos uno sea masculino.
c) De que uno sea femenino y uno masculino.

Femenino → 6

Masculino → 11

Desarrollo

Literal (a)

$$P(A \cap B) = \frac{6}{17} * \frac{5}{16} = 0{,}11$$

Literal (b)

$$P(al\ menos\ 1\ F) = 1 - P(ninguno)$$
$$= 1 - \frac{11}{17} * \frac{10}{16} = 0{,}59$$

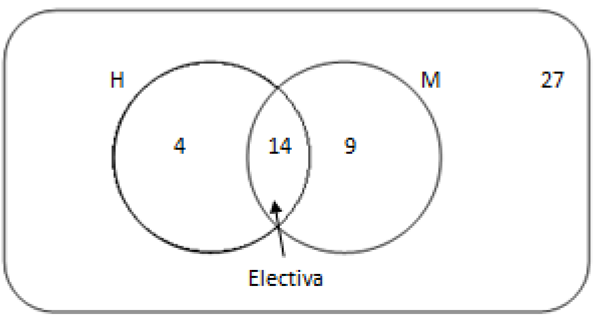
Literal (C)

$$P(M \cap F) = P(M \cap F) + P(F \cap M)$$
$$= \frac{11}{17} * \frac{6}{17} + \frac{6}{17} * \frac{11}{16} = 0{,}48$$

- En el curso de 5to semestre de Ingeniería en Sistemas, hay 9 hombres y 18 mujeres. De ellos 5 hombres y la mitad de las mujeres están recibiendo Electiva como asignatura. Calcule la probabilidad:

a) Uno elegido al azar sea hombre o estudie Electiva.

b) Uno elegido al azar sea mujer y no estudie Electiva.



Literal (a)

$$P(A \cup B) = \frac{18}{27} = 0{,}66$$

Literal (b)

$$\frac{9}{27} = 0{,}33$$

Independencia de evento

- En la CINT se tiene una muestra de 53 encuestados, de los cuales 2 de ellos tienen la edad de 27 años. Se repite 2 veces el ensayo, extraer una encuesta al azar revisar su edad y devolverlo:

a) Encuentre la probabilidad que en ambos intentos se extraiga las encuestas donde su edad es de 27 años.

Ea = Encontrar una encuesta con edad de 27 años.

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B) = 0{,}037 * 0.037 = 0.0013$$

R: / Existe una probabilidad de 0,0013 % de extraer la encuesta donde la edad sea de 27 años.

b) Calcule la probabilidad de que en los 2 intentos se obtenga al menos 1 encuesta donde la edad de 27 años.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.037 + 0{,}037 - 0.0013 = 0{,}072$$

R: / Existe una probabilidad de 0,072 % de poder obtener al menos 1 encuesta donde la edad sea de 27 años.

c) Basándose en las tablas, calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar, esté en total desacuerdo y que trabaje.

METODOLOGÍA_CALFICACIÓN	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
TOTAL ACUERDO	60	30%
ACUERDO	63	32%
INDIFERENTE	42	21%
DESACUERDO	25	13%
TOTAL DESACUERDO	10	5%
Total general	**200**	**100%**

TRABAJO	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
No	86	43%
Si	114	57%
Total general	**200**	**100%**

A → Total Desacuerdo

B → Que Trabaje

$$P(A) * P(B) = 0{,}05 * 0{,}57 = 0{,}028$$

d) Calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar sea el docente especializado en la asignatura que imparte, y que tenga de 20 a 25 años.

A → Este totalmente de acuerdo

B →Tenga de 20 a 25 años

$$P(A) * P(B) = (0{,}39) * (0{,}34 + 0{,}26 + 0{,}18) = 0{,}30$$

e) De la pregunta sobre actividades extracurriculares, calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar esté en total acuerdo o acuerdo, y que a su vez, tenga entre 22 y 23 años.

A → Total Acuerdo o Acuerdo

X → Total Acuerdo

Y → Acuerdo

B → Entre 22 y 23 años

$$A = P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$$
$$= 0{,}33 + 0{,}35 - 0{,}11 = 0{,}57$$
$$B = P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$
$$= 0{,}57 * 0{,}26 = 0{,}148$$

- Se conoce que en la carrera Licenciatura en Sistemas de Información se tomó una muestra de 31 estudiantes, de los cuales 10 son de sexo femenino y 21 masculino. De ellos se desea escoger a 2 representantes para el comité estudiantil. ¿Cuál es la probabilidad que los representantes sean 1 masculino y 1 femenino?

Ea. Representante Masculino.

Eb. Representante Femenino.

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$
$$= 0{,}67 * 0{,}32 = 0{,}21$$

Regla multiplicativa

- En la carrera Licenciatura de Sistema de Información, 10 estudiantes son de sexo femenino, se extrae al azar 2 encuestas de nuestra base de datos de dicha carrera. Calcule la probabilidad de:

a) Las dos encuestas son de sexo femenino.
b) Solo 1 encuesta es de sexo femenino y la otra no.
c) Al menos 1 es del sexo femenino.
d) Ninguna es del sexo femenino.

Desarrollo

Ea.- La primera encuesta tomada de la BD es femenina.
Eb.- La primera encuesta tomada de la BD es femenina.

Literal (a)

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B/A)$$

$$= \left(\frac{10}{31}\right)\left(\frac{9}{30}\right) = \frac{90}{930} = 0{,}096$$

R: / Se tiene una probabilidad de 0,096% en que se pueda extraer dos encuestas del sexo femenino.

Literal (b)

$$P(A \cap B^C) + P(A^C * B) = P(A)P(B^C/A) + P(A^C)P(B/A^C)$$

$$= \left(\frac{10}{31}\right)\left(\frac{21}{30}\right) + \left(\frac{21}{31}\right)\left(\frac{10}{30}\right) = 0{,}22 + 0{,}22 = 0{,}44$$

R: / Se tiene una probabilidad de 0,44% de que solo una encuestas sea del sexo femenino y la otra no.

Literal (c)

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) \cup P(A \cap B^C) \cup P(A^C \cap B)$$

$$= 0{,}096 + 0{,}22 + 0{,}22 = 0{,}53$$

R: / Se tiene una probabilidad de 0,44% en que solo una encuestas sea del sexo femenino y la otra no.

Literal (d)

$$P((A \cup B)^C) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - 0{,}53 = 0{,}47$$

R: / Existe un probabilidad de 0,47% que ninguno sea del sexo femenino

Probabilidad Total y Bayes

De las encuestas que se realizaron en la UG se escoge de la base de datos la siguiente información sobre las edades de los encuestados y el porcentaje de sus opiniones de los nuevos docentes especializados en la materia.

Edad	Encuestados	% Acuerdo Docentes. Especializados
20	32	19,1%
21	35	21,4%

Determine la probabilidad de que una encuesta elegida al azar sea de encuestados con edades de 20 y 21 años, y estén de acuerdo con que los nuevos docentes sean especializados en la materia que imparten.

(Ea).- Una encuesta escogida al azar está de acuerdo con los docentes especializados.
(Eb).- Edad de 20 años
(Ec).- Edad 21 años.

$$P(A) = P(Eb)P(Ea/Eb) + P(Ec)P(Ea/Ec)$$

$$= \left(\frac{32}{200} * 0{,}191\right) + \left(\frac{35}{200} * 0{,}214\right)$$

$$= 0{,}03056 + 0{,}03745 = 0{,}068 = 6{,}8\%$$

R: / Se determinó que existe un 6,8% de probabilidad de que se escoja la encuesta bajo los términos especificados.

- De la base de datos de las encuestas realizadas en la CISC se extrae al azar 3 encuestas. Se conoce que 12 de los encuestados tienen la edad de 24 años. Calcule la probabilidad de que:

a) Las 3 encuestas pertenezcan a encuestados de 24 años.
b) Solo 2 encuestas pertenezcan a encuestados de 24 años.
c) Al menos 1 encuesta pertenezcan a un encuestado de la edad de 24 años.

Desarrollo

Literal (a)

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B/A) * P(C/A \cap B)$$
$$= \left(\frac{12}{91}\right) * \left(\frac{11}{90}\right) * \left(\frac{10}{89}\right) = 0{,}0018$$

Literal (b)

$$P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A^c \cap B \cap C\ )$$
$$= P(A)P(B)P(C^c/A)P(C^c/B) + P(A)P(C)P(B^c/A)P(B^c/A) + P(B)P(C)P(A^c/B)P(A^c/C)$$

$$= \left[\left(\frac{12}{91}\right) * \left(\frac{11}{91}\right) * \left(\frac{79}{90}\right) * \left(\frac{78}{89}\right)\right] + \left[\left(\frac{12}{91}\right) * \left(\frac{79}{90}\right) * \left(\frac{78}{90}\right) * \left(\frac{14}{91}\right)\right] + \left[\left(\frac{79}{90}\right) * \left(\frac{78}{89}\right) * \left(\frac{12}{91}\right) * \left(\frac{11}{91}\right)\right]$$

$$= 0{,}036$$

- De las encuestas realizadas a las carreras técnicas de la UG se obtiene que del sexo masculino existen 100 encuestados y del sexo femenino 100 encuestados. Se tiene una probabilidad de 19,5% de las mujeres que están parciamente satisfechas con la metodología de enseñanza de los nuevos docentes; y un 20,5% de los hombres. ¿Calcule la probabilidad que al elegir una encuesta al azar, esta pertenezca a uno de los encuestados que está parcial satisfecho con la metodología de enseñanza de los nuevos docentes?

Sexo	Encuestados	Probabilidad
F	100	19,5%
M	100	20,5%

Eventos

A.- Elegir al azar una encuesta que resulta parcialmente satisfactorio con la metodología de enseñanza de los nuevos docentes.

B.- Encuestados con sexo femenino.

C. Encuestados con sexo masculino.

Desarrollo

$$P(A) = P(B)P(A/B) + P(C)P(A/C)$$

$$\left(\frac{100}{20}\right)(0{,}195) + \left(\frac{100}{200}\right)(0{,}205)$$
$$= 0{,}0975 + 0{,}1025 = 0{,}2 = 20\%$$

R: / Existe una probabilidad del 20% de que se cumpla el evento propuesto.

- Se tomó una muestra de 53 encuestados en la CINT, de ellos el 22,6% no trabaja de total acuerdo con las actividades académicas extracurriculares. Los que sí trabajan de acuerdo con las actividades extracurriculares también representan un 22,6%. Calcule la probabilidad total y la probabilidad de escoger una encuesta de la base de datos de CINT en la cual los encuestados estén en total acuerdo con las actividades extracurriculares y que sí trabajen.

E1→Encuestado que sí trabaja.
E2→ Encuestado que no trabaja.
A→ Opinan total acuerdo con las actividades extracurriculares.

$$P(E1) = 28/53 = 0{,}528$$

$$P(E2) = 25/53 = 0{,}0471$$

$$P(A/E1) = 0{,}226$$

$$P(A/E2) = 0{,}226$$

$$P(A) = 0{,}528(0{,}226) + 0{,}471(0{,}226) = 0{,}225 = 22{,}5\%$$

$$P(B/A) = \frac{0{,}528 * 0{,}226}{0{,}225}$$

$$P(B1/A) = 0{,}53 = 53\%$$

R: / Existe una probabilidad de 53% de que se cumpla el evento A.

- Según los datos recopilados sobre la nueva metodología de calificación y el sexo, se obtuvieron estos datos:

Sexo	ACUERDO	DESACUERDO	INDIFERENTE	TOTAL ACUERDO	TOTAL DESACUERDO	Total general
F	30	17	18	31	4	100
M	33	8	24	29	6	100
Total general	**63**	**25**	**42**	**60**	**10**	**200**

a) Se selecciona un alumno al azar, calcule la probabilidad de que sea masculino.
b) Se escogió un alumno al azar y resultó ser masculino, calcule la probabilidad de que haya marcado INDIFERENTE en la encuesta.

Desarrollo

Literal (a)

$$PT = (0.30)\,(0.48) + (0.32)\,(0.52) + (0.21)\,(0.57) + (0.13)\,(0.32) + (0.05)\,(0.60)$$

$$= 0.14 + 0.16 + 0.12 + 0.04 + 0.03$$

$$= 0{,}49$$

Literal (b)

$$P(B/A) = \frac{0{,}21 * 0{,}57}{0{,}49} = 0{,}24$$

- Según los datos recopilados sobre las actividades académicas extracurriculares y su relación con el trabajo, se obtuvieron estos datos:

a) Si se selecciona uno al azar, calcule la probabilidad de que trabaje.

b) Se seleccionó uno al azar y resultó que no trabaja, calcule la probabilidad de que haya marcado TOTAL ACUERDO en la encuesta.

Desarrollo

Literal (a)

$$PT = (0.33)(0.49) + (0.35)(0.69) + (0.17)(0.60) + (0.12)(0.39) + (0.05)(0.5)$$

$$= 0{,}57$$

Primero se selecciona la probabilidad total de que no trabaje.

$$\mathrm{PT} = (0.33)(0.51) + (0.35)(0.31) + (0.17)(0.40) + (0.12)(0.61) + (0.05)(0.5)$$

$$= 0{,}44$$

Bayes

$$P(B/A) = \frac{0{,}33 * 0{,}51}{0{,}44} = 0{,}38$$

- De la carrera de Licenciatura en Sistema de Información, 21 encuestados son masculinos de un 32,2% están de acuerdo que los nuevos docentes tengan título de 4to nivel, 10 son femeninas con 22,5 % de acuerdo. ¿Calcule la probabilidad de escoger al azar una encuesta que esté de acuerdo que el docente tenga título de 4to nivel hay en total?

Trabaja	**ACUERDO**	**DESACUERDO**	**INDIFERENTE**	**TOTAL ACUERDO**	**TOTAL DESACUERDO**	**Total general**
No	21	14	13	33	5	86
Si	48	9	20	32	5	114
Total general	**69**	**23**	**33**	**65**	**10**	**200**

E1→ Sexo masculino

$$P(E1) = 0{,}21 \quad P(A/E1) = 0{,}3222$$

E2→Sexo Femenino

$$P(E2) = 0{,}10 \qquad P(A/E2) = 0{,}225$$

$$P(A) = P(E1)P(A/E1) + P(E2)P(A/E2)$$

$$= 0{,}21(0{,}322) + 0{,}10(0{,}225)$$

$$= 0{,}090 = 9\%$$

¿Cuál es la probabilidad de escoger una encuesta y resulte que esté DE ACUERDO y el encuestado sea del sexo femenino?

$$P(B1/A) = \frac{P(B1) * P(A/B1)}{P(A)}$$

$$= \frac{0{,}1 * 0{,}225}{0{,}09} = 0{,}25$$

- Se obtiene la siguiente información de la base de datos de las encuestas realizadas en las carreras técnicas de la UG. 13 encuestados de 4to nivel de la CISC opinan que están totalmente satisfechos con la metodología de la enseñanza de los nuevos docentes, ello representa un porcentaje de 9,89%. Los de 5to nivel son 27, de ellos un 20,87% están totalmente satisfechos.

Niveles	Total encuestados	Totalmente satisfechos
4to	13	9,89
5to	27	20,87

a) Encuentre la probabilidad total de los que están totalmente satisfechos. Si elige una encuesta al azar y resulta ser de 5to semestre.

E1→Encuestados de 4to nivel.
E2 → Encuestados de 5to nivel.

$$P(E1) = 13/91 = 0{,}14 \qquad P(A/E1) = 0{,}0989$$
$$P(E2) = 27/91 = 0{,}29 \qquad P(A/E2) = 0{,}0208$$

A→ Están totalmente satisfechos con la metodología de enseñanza de nuevos docentes.

$$P(A) = P(E1)P(A/E1) + P(E2)P(A/E2)$$

$$= 0{,}14(0{,}0989) + 0{,}29(0{,}0208)$$

$$= 0{,}0198 = 1{,}98\%$$

$$P(B1/A) = \frac{P(B1) * P(A/B1)}{P(A)}$$
$$= \frac{0{,}29 * 0{,}0208}{0{,}0198} = 0{,}304 = 30{,}4\%$$

- En la CINT se tiene la siguiente tabla de información.

Capacitación de docentes		
Edad	Total encuestados	Total acuerdo
21	8	7,54%
22	9	7,54%
23	3	5,66%
24	6	9,43%

Total encuestados de CINT es de 53. De ellos 8 encuestados tienen la edad de 21 años y opinaron que están en total acuerdo con que los dicentes se capaciten constantemente. Supongamos que se elige encuesta al azar y el encuestado tiene 23 años. Calcule la probabilidad que este opine que está en total acuerdo con las capacitaciones de docentes.

E1→ Edad 21 años

$$P(E1) = 8/53 = 0{,}15$$

E2→ Edad 22 años

$$P(E2) = 9/53 = 0{,}16$$

E3→ Edad 23 años

$$P(E3) = 3/53 = 0{,}05$$

E4→ Edad 24 años

$$P(E4) = 6/53 = 0{,}11$$

A→Están en TOTAL ACUERDO con la capacitación de docentes.

$$P(A/E1) = 0{,}0745$$
$$P(A/E2) = 0{,}0754$$
$$P(A/E3) = 0{,}0566$$
$$P(A/E4) = 0{,}0943$$
$$(A) = 0{,}15(0{,}0754) + 0{,}16(0{,}0754) + 0{,}05(0{,}0566) + 0{,}11(0{,}0943)$$
$$P(A) = 0{,}036 = 3{,}6\%$$

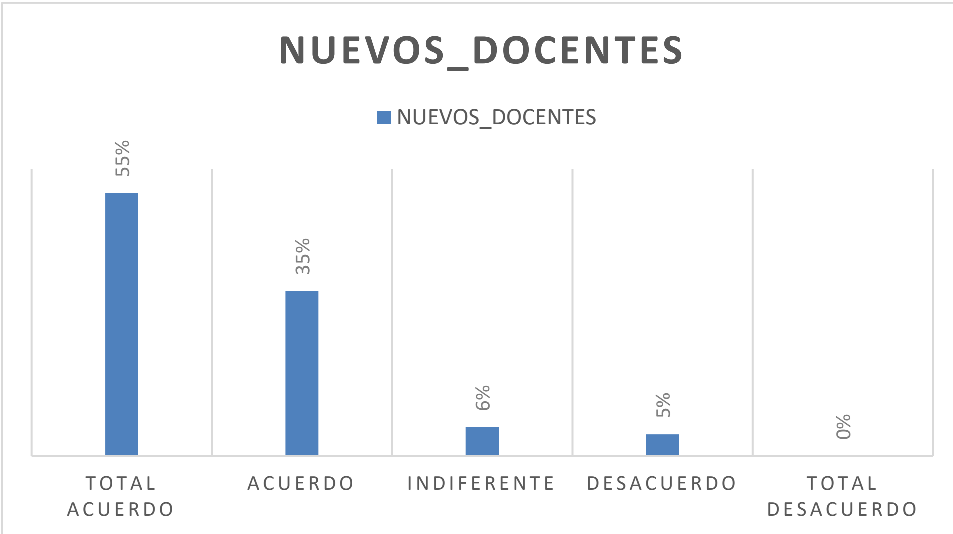
Probabilidad de que el encuestado tenga 23 años y este en TOTAL ACUERDO.

$$P(B1/A) = \frac{P(B1) * P(A/B1)}{P(A)}$$

$$= \frac{0{,}05 * 0{,}0566}{0{,}036} = 0{,}078 = 7{,}8\%$$

Distribución acumulada de probabilidad

X: Cuál es la probabilidad de que se contraten nuevos docentes



$$P(X = x) = Total\ Acuerdo + Acuerdo$$

$$P(X = x) = 55\% + 35\% = 90\%$$

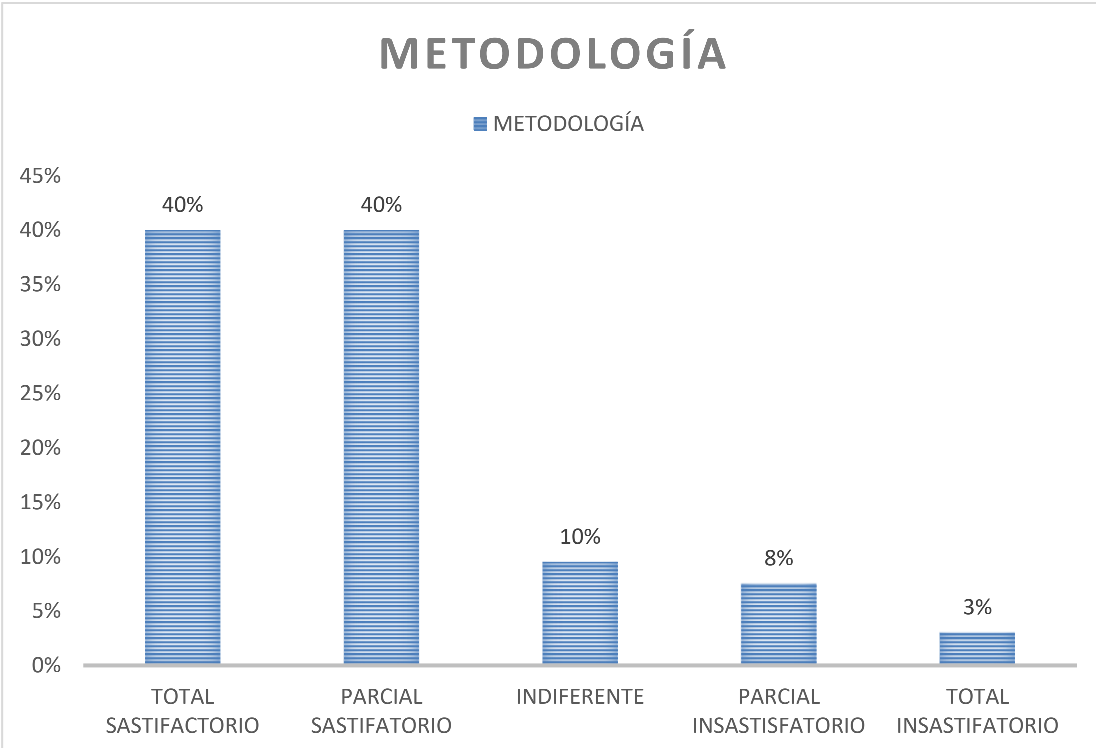
Hay una probabilidad del 90% que indica que el análisis estadístico es muy factible, por lo cual se procede a realizar la distribución empírica (distribución de probabilidad).

NUEVOS_DOCENTES	f(x)	F(X)
TOTAL ACUERDO	110	0,55
ACUERDO	69	0,895
INDIFERENTE	12	0,955
DESACUERDO	9	1
TOTAL DESACUERDO	0	1
Total general	200	

La distribución de probabilidad discreta quedaría de la siguiente manera.

$$F(x) = P(X = x) = P(TA) + P(A)$$
$$F(x) = P(X = x) = 0{,}55 + 0{,}35 = 0{,}90$$

X: ¿Cuál es la probabilidad de satisfacción sobre la metodología de enseñanza de los nuevos docentes?



$$P(X = x) = Total\ Acuerdo + Acuerdo$$
$$P(X = x) = 40\% + 40\% = 80\%$$

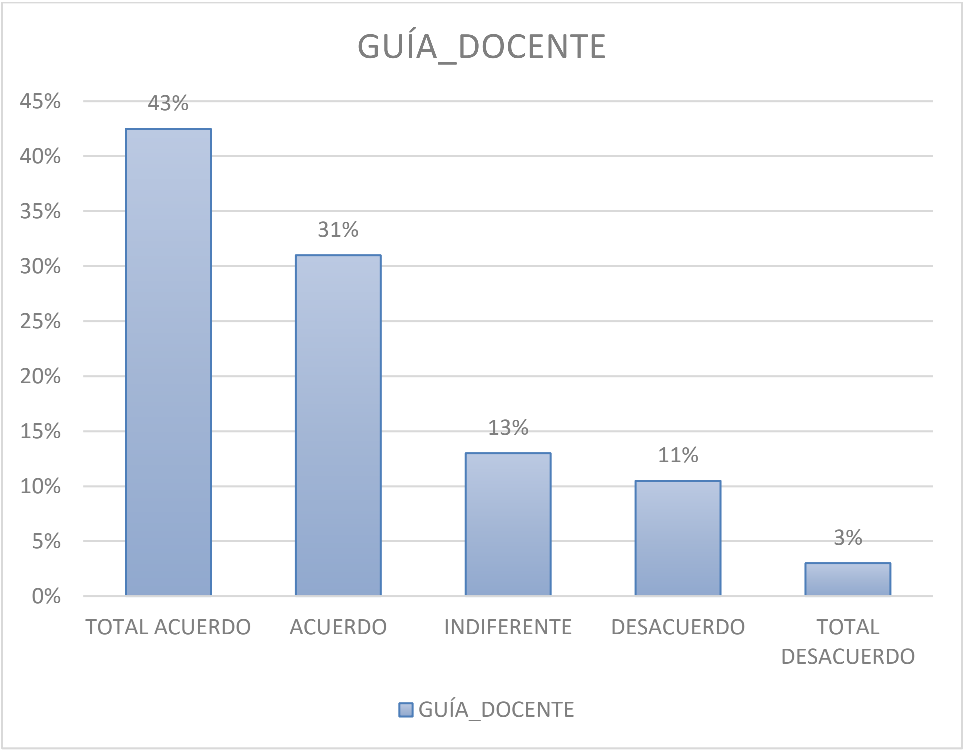
Hay una probabilidad del 80% que indica que el análisis estadístico es factible, por lo que se procede a realizar la distribución empírica (distribución de probabilidad).

METODOLOGÍA	f(x)	F(X)
TOTAL SASTIFACTORIO	80	0,4
PARCIAL SASTIFATORIO	80	0,8
INDIFERENTE	19	0,895
PARCIAL INSASTISFATORIO	15	0,97
TOTAL INSASTIFATORIO	6	1
Total general	200	

La distribución de probabilidad discreta quedaría de la siguiente manera.

$$F(x) = P(X = x) = P(TA) + P(A)$$
$$F(x) = P(X = x) = 0{,}40 + 0{,}40 = 0{,}80$$

X: ¿Cuál es la probabilidad de orientación que le han dado los nuevos docentes a la asignatura que ellos imparten?



$$P(X = x) = Total\ Acuerdo + Acuerdo$$
$$P(X = x) = 43\% + 31\% = 74\%$$

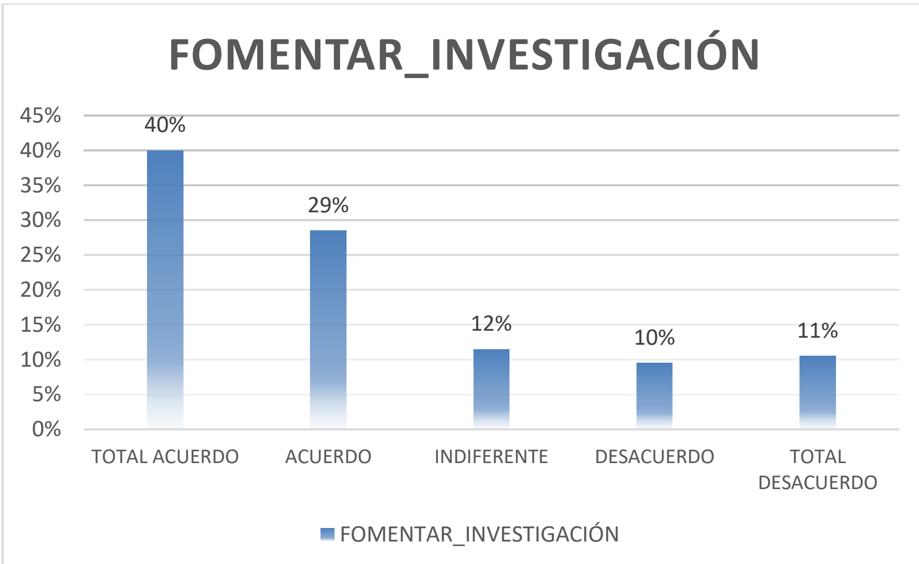
Existe una probabilidad del 74% que indica que el análisis estadístico es factible, por lo que se procede a realizar la distribución empírica (distribución de probabilidad).

GUÍA_DOCENTE	**f(x)**	**F(X)**
TOTAL ACUERDO	85	0,425
ACUERDO	62	0,735
INDIFERENTE	26	0,865
DESACUERDO	21	0,97
TOTAL DESACUERDO	6	1
Total general	200	

La distribución de probabilidad discreta quedaría de la siguiente manera.

$$F(x) = P(X = x) = P(TA) + P(A)$$
$$F(x) = P(X = x) = 0{,}43 + 0{,}31 = 0{,}74$$

X: ¿Cuál es la probabilidad de que los docentes fomenten la investigación en los estudiantes?



$$P(X = x) = Total\ Acuerdo + Acuerdo$$
$$P(X = x) = 40\% + 29\% = 69\%$$

Existe una probabilidad del 69% que indica que el análisis estadístico es factible, por lo que se procede a realizar la distribución empírica (distribución de probabilidad).

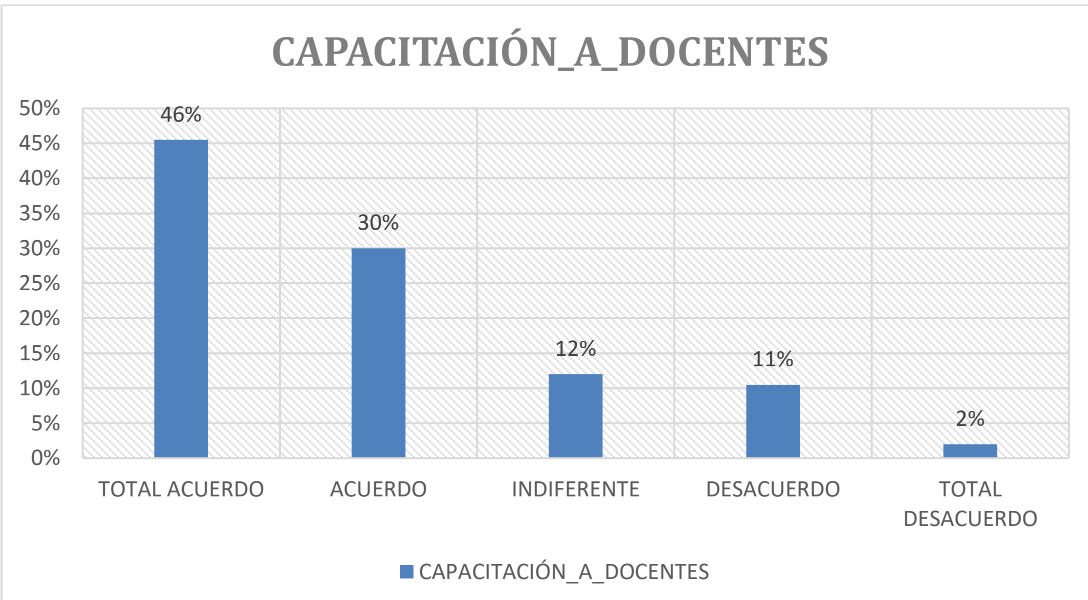
FOMENTAR_INVESTIGACIÓN	f(x)	F(X)
TOTAL ACUERDO	80	0,4
ACUERDO	57	0,685
INDIFERENTE	23	0,8
DESACUERDO	19	0,895
TOTAL DESACUERDO	21	1
Total general	200	

$$F(x) = P(X = x) = P(TA) + P(A)$$
$$F(x) = P(X = x) = 0{,}40 + 0{,}29 = 0{,}69$$

Existe una probabilidad del 69% que indica que el análisis estadístico no es factible, ya que para que sea una probabilidad aceptable debe ser mayor del 70%. Por cuanto, se procede a plantear la distribución empírica (distribución de probabilidad). Ello implica recomendar y a mejorar el método de investigación y enseñanza del docente con su alumno, para poder modificar el pensamiento de aquellos alumnos que mostraron INDIFERENCIA (12%).

$$F(x) = P(X = x) = P(TA) + P(A) + \text{P (I)}$$
$$F(x) = P(X = x) = 0{,}40 + 0{,}29 + 0.12 = 0{,}81$$

X: ¿Cuál es la probabilidad de que los nuevos docentes estén más capacitados para reforzar los conocimientos en cada una de las asignaturas que imparten?



$$P(X = x) = Total\ Acuerdo + Acuerdo$$

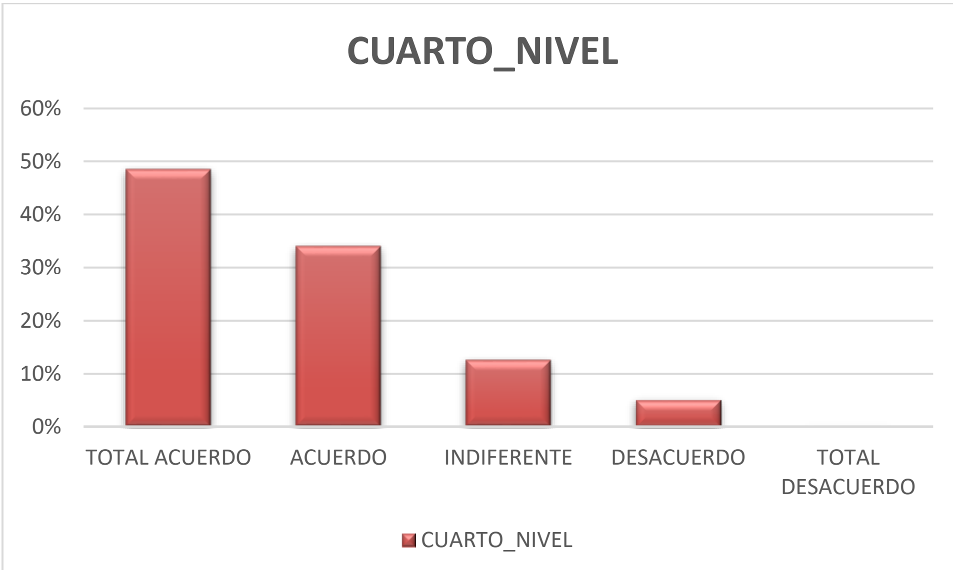
$$P(X = x) = 46\% + 30\% = 76\%$$

CAPACITACIÓN_A_DOCENTES	*f(x)*	*F(X)*
TOTAL ACUERDO	91	0,455
ACUERDO	60	0,755
INDIFERENTE	24	0,875
DESACUERDO	21	0,98
TOTAL DESACUERDO	4	1
Total general	200	

La probabilidad sobre la capacitación a los docentes es alta, por lo que indica que el análisis es viable, la distribución de probabilidad será la siguiente.

$$F(x) = P(X = x) = P(TA) + P(A)$$
$$F(x) = P(X = x) = 0{,}46 + 0{,}30 = 0{,}76$$

X: ¿Cuál es la probabilidad de que los nuevos docentes tengan un título de cuarto nivel?



$$P(X = x) = Total\ Acuerdo + Acuerdo$$
$$P(X = x) = 49\% + 34\% = 83\%$$

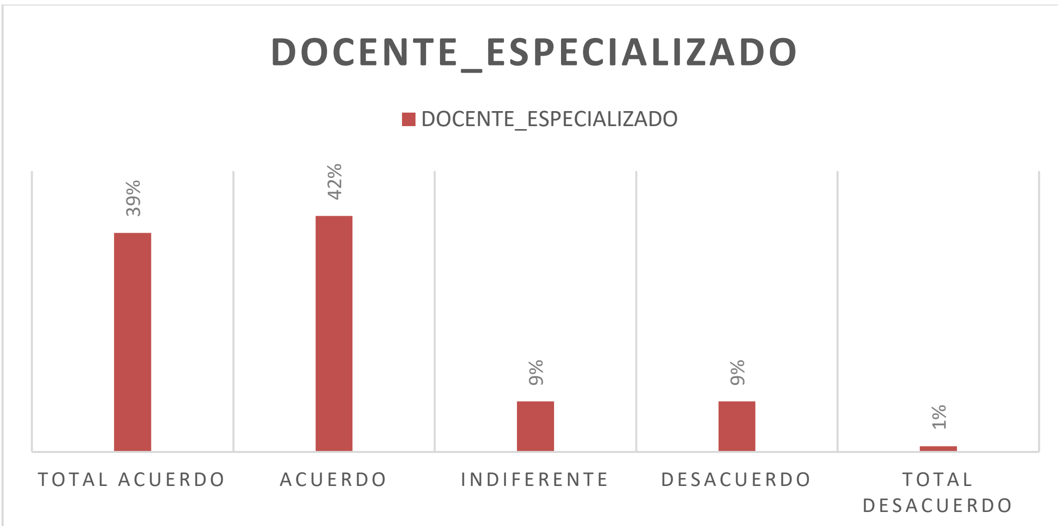
CUARTO_NIVEL	f(x)	F(X)
TOTAL ACUERDO	97	0,485
ACUERDO	68	0,825
INDIFERENTE	25	0,95
DESACUERDO	10	1
TOTAL DESACUERDO	0	1
Total general	200	

El TOTAL ACUERDO y ACUERDO generan una probabilidad muy alta sobre la obtención de un título de cuarto nivel de los nuevos docentes, por lo que indica que el análisis es viable y la distribución de probabilidad será la siguiente.

$$F(x) = P(X = x) = P(TA) + P(A)$$

$$F(x) = P(X = x) = 0{,}49 + 0{,}34 = 0{,}83$$

X: ¿Cuál es la probabilidad de que cada docente esté especializado en la asignatura que imparte?



$$P(X = x) = Total\ Acuerdo + Acuerdo$$
$$P(X = x) = 39\% + 42\% = 81\%$$

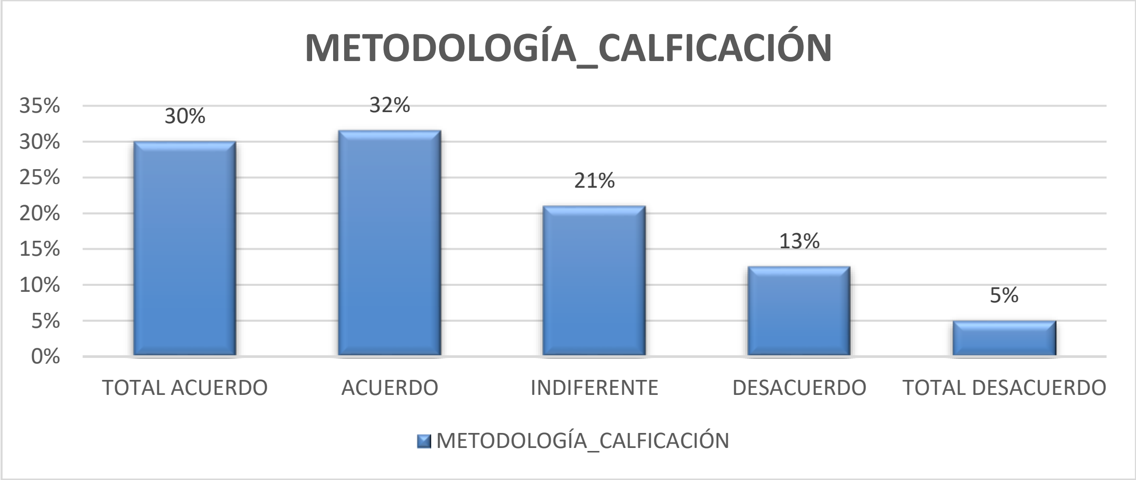
Hay una probabilidad del 81% que indica que el análisis estadístico es factible, por lo que se procede a realizar la distribución empírica (distribución de probabilidad).

DOCENTE_ESPECIALIZADO	f(x)	F(X)
TOTAL ACUERDO	78	0,39
ACUERDO	84	0,81
INDIFERENTE	18	0,9
DESACUERDO	18	0,99
TOTAL DESACUERDO	2	1
Total general	200	

La distribución de probabilidad discreta quedaría de la siguiente manera.

$$F(x) = P(X = x) = P(TA) + P(A)$$
$$F(x) = P(X = x) = 0{,}39 + 0{,}42 = 0{,}81$$

X: ¿Cuál es la probabilidad de que se esté de acuerdo con la nueva metodología de calificación propuesta por el gobierno a la Universidad de Guayaquil?



$$P(X = x) = Total\ Acuerdo + Acuerdo$$
$$P(X = x) = 30\% + 32\% = 62\%$$

Hay una probabilidad del 62% que indica que el análisis estadístico es factible, pero igual se procede a realizar la distribución empírica (distribución de probabilidad).

METODOLOGÍA_CALFICACIÓN	f(x)	F(X)
TOTAL ACUERDO	60	0,3
ACUERDO	63	0,615
INDIFERENTE	42	0,825
DESACUERDO	25	0,95
TOTAL DESACUERDO	10	1
Total general	200	

$$F(x) = P(X = x) = P(TA) + P(A)$$
$$F(x) = P(X = x) = 0{,}30 + 0{,}32 = 0{,}62$$

Hay una probabilidad del 62% que indica que este estudio no será factible y se recomendaría convencer el 21% de los alumnos INDIFERENTES. Para ello se sugiere cambiar la metodología de calificación a favor de los gustos y perspectivas de los estudiantes a partir de la siguiente manera.

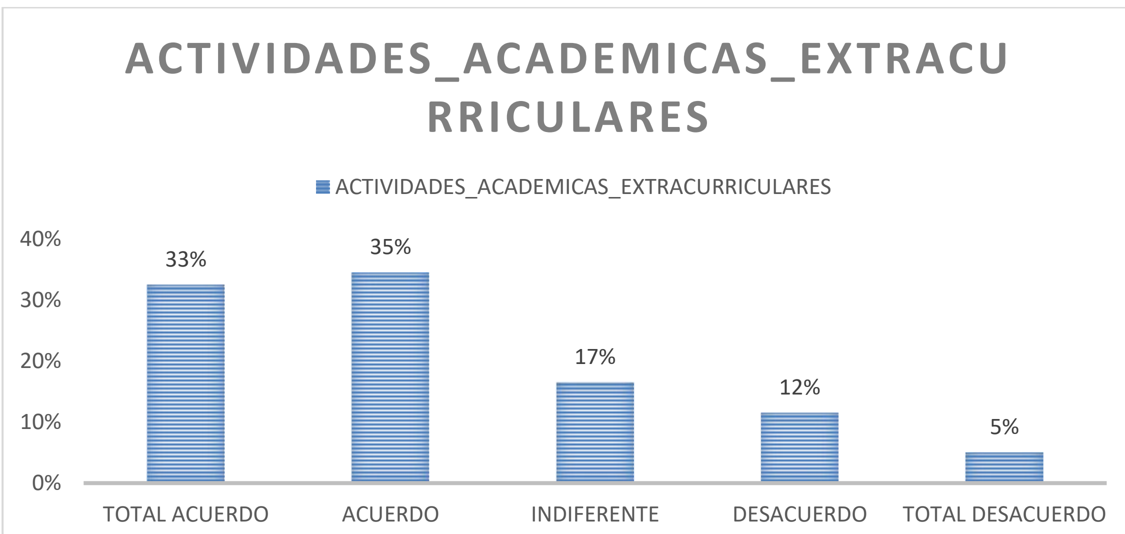
P(X = x) = Total Acuerdo + Acuerdo + Indiferente

P(X = x) = 30% + 32% + 21% =83%

Se sugiere cambiar la distribución empírica con datos mucho más factibles para el estudio.

$$F(x) = P(X = x) = P(TA) + P(A) + \mathrm{P\ (I)}$$
$$F(x) = P(X = x) = 0{,}30 + 0{,}32 + 0.21 = 0{,}83$$

X: ¿Cuál es la probabilidad de que el docente fomente el desarrollo de actividades académicas extracurriculares?



$$P(X = x) = Total\ Acuerdo + Acuerdo$$
$$P(X = x) = 33\% + 35\% = 68\%$$

El resultado ha arrojado una probabilidad del 68%, mediante la cual se puede deducir que es factible, ya que más del 50% de personas están de ACUERDO con que los docentes fomenten el desarrollo de actividades extracurriculares. A continuación procedemos a realizar nuestra correspondiente distribución de probabilidad.

ACTIVIDADES_ACADEMICAS_EXTRACURRICULARES	**f(x)**	**F(X)**
TOTAL ACUERDO	65	0,325
ACUERDO	69	0,67
INDIFERENTE	33	0,835

DESACUERDO	23	0,95
TOTAL DESACUERDO	10	1
Total general	200	

$$F(x) = P(X = x) = P(TA) + P(A)$$

$$F(x) = P(X = x) = 0{,}33 + 0{,}35 = 0{,}68$$

Hay una probabilidad del 68% que indica que este estudio no será factible y se recomendaría convencer el 17% de los alumnos INDIFERENTES, mediante el desarrollo de actividades académicas extracurriculares, por parte de los docentes, de tal forma que cambie la perspectiva de estos estudiantes.

$$P(X = x) = Total\ Acuerdo + Acuerdo + Indiferente$$

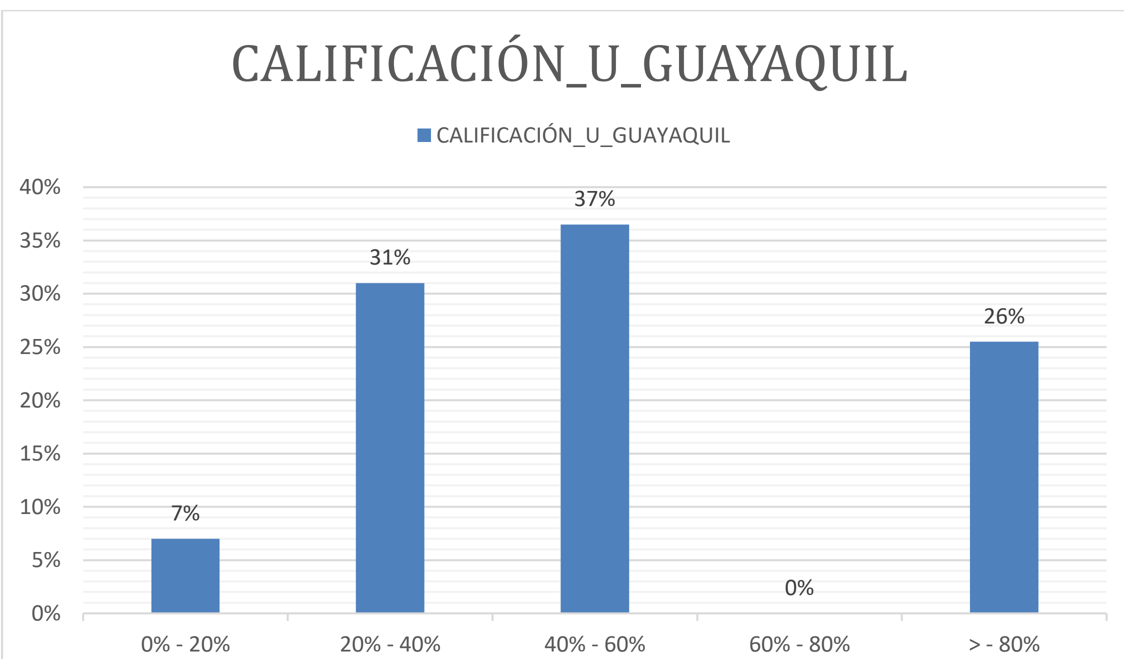
$$P(X = x) = 33\% + 35\% + 17\% = 85\%$$

Se sugiere cambiar la distribución empírica con datos mucho más factibles para el estudio.

$$F(x) = P(X = x) = P(TA) + P(A) + \mathrm{P\ (I)}$$

$$F(x) = P(X = x) = 0{,}33 + 0{,}35 + 0.17 = 0{,}85$$

X: ¿Cuál es la probabilidad de con qué porcentaje calificaría a la Universidad de Guayaquil a través de la nueva estructura que se está implementando?



$$P(X > x) = \int_0^{20} f(x)dx + \int_{20}^{40} f(x)dx + \int_{40}^{60} f(x)dx + \int_{60}^{80} f(x)dx + \int_{80}^{100} f(x)dx$$

$P(X > x) =$ 0, 07 0, 31 0, 37 0 0, 26

$P(X > x) =$ 7% 31% 37% 0% 26%

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 14 & ; 0 \leq x \leq 20 \\ 62 & ; 20 \leq x \leq 40 \\ 73 & ; 40 \leq x \leq 60 \\ 0 & ; 60 \leq x \leq 80 \\ 51 & ; 80 \leq x \leq 100 \end{cases}$$

$$P(X > 70\%) = \int_{20}^{40} f(x)dx + \int_{40}^{60} f(x)dx + \int_{60}^{80} f(x)dx + \int_{80}^{100} f(x)dx$$

$$P(X > x) = 0.31 + 0.37 + 0 + 0.26 = 0.93$$

Al considerar a aquellas personas que tienen INDIFERENTE su decisión de calificación para la Universidad de Guayaquil se obtiene una probabilidad de 93% que es muy factible al momento de analizar la realidad con los distintos factores a asumir.

Binomial

- Los cursos de mantenimiento de computadoras han tenido gran acogida este semestre, al punto que el 70% de los alumnos encuestados que pertenecen a la carrera Ingeniería en Sistemas, ya han recibido el curso.

Al grupo del S6K le atrae el mantenimiento de computadoras, calcule:

a) Probabilidad que del S6K hayan recibido el curso 3 personas.

$$P = 0,7$$
$$Q = 0,3$$
$$N = S6K = 8$$
$$X = 3$$
$$P(x = 3) = \frac{8!}{3(8-3)!} * 0,7^3 * 0,3^5$$

$$\frac{8 * 7 * 6 * 5!}{3! * 5!} * 0,7^3 * 0,3^2 = 0,04$$

b) Probabilidad que como máximo 2 hayan recibido el curso.

$$`P(x <= 3) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)$$

$$= \left[\frac{8!}{0(8-0)!} * 0{,}7^0 * 0{,}3^8\right] + \left[\frac{8!}{0(8-0)!} * 0{,}7^1 * 0{,}3^7\right] + [\frac{8!}{0(8-0)!} * 0{,}7^2 * 0{,}3^6]$$

$$= 0{,}01$$

- De las 200 personas encuestadas, el 39% está en TOTAL ACUERDO de que el docente sea especializado en la materia que imparte. Si se seleccionan 10 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad que 4 hayan votado por TOTAL ACUERDO?

$$P = 0{,}39$$
$$N = 10$$
$$X = 4$$
$$P(x = 4) = \frac{10!}{4(10-4)!} * 0{,}39^4 * 0{,}61^6$$

$$\frac{10 * 9 * 8 * 7 * 6!}{4! * 6!} * 0{,}7^3 * 0{,}3^2 = 0{,}25$$

- De las 200 personas encuestadas, el 32% está de ACUERDO con la nueva metodología de calificación de la Universidad de Guayaquil. Si se seleccionan 10 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad que 5 hayan votado de ACUERDO?

$$P = 0{,}32$$
$$N = 10$$
$$X = 5$$
$$P(x = 5) = \frac{10!}{5(10-5)!} * 0{,}32^5 * 0{,}68^5$$

$$\frac{10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5!}{5! * 5!} * 0{,}32^5 * 0{,}68^5 = 0{,}12$$

R: / De este 32% de alumnos que marcaron estar de ACUERDO, se selecciona al azar, una muestra de 10 alumnos. Si se considera que se toman 10 personas y con un 32% de probabilidades de que salga alguien que haya marcado estar de ACUERDO; las probabilidades de encontrar 5 personas de las 10 escogidas, son bajas, son de un 12%.

- De los alumnos encuestados, el 33% está TOTAL DE ACUERDO con la realización de actividades extracurriculares académicas. Si se seleccionan al azar, 12 personas, ¿cuál es la probabilidad de que 3 hayan votado de ACUERDO?

$P = 0{,}33$
$N = 12$
$X = 3$

$$P(x = 3) = \frac{12!}{3(12-3)!} * 0{,}33^3 * 0{,}67^9$$

$$\frac{12 * 11 * 10 * 9!}{3! * 9!} * 0{,}33^3 * 0{,}67^9 = 0{,}21$$

R: / De este 33% de alumnos que marcaron TOTAL ACUERDO, se selecciona una muestra, al azar, de 12 alumnos. Si se considera que se toman 12 personas y con un 33% de probabilidades de que salga alguien que haya marcado TOTAL ACUERDO, las probabilidades de encontrar 3 personas de las 12 escogidas que hayan marcado TOTAL ACUERDO, son bastantes reales, son de un 21%.

- De las encuestas realizadas en la Facultad Técnica de la UG, el 43% está en TOTAL ACUERDO con respecto a la nueva orientación, por parte de los nuevos docentes (guía docente). Si se seleccionan al azar, 20 personas, ¿cuál es la probabilidad que 5 hayan escogido TOTAL ACUERDO a la guía docente?

$P = 0{,}43$
$N = 20$
$X = 5$

$$P(x = 5) = \frac{20!}{5(20-5)!} * 0{,}43^5 * 0{,}57^{15}$$

$$\frac{20 * 19 * 18 * 17 * 16 * 15!}{5! * 15!} * 0{,}43^5 * 0{,}57^{15} = 0{,}049$$

- Se obtiene la siguiente información en las encuestas realizadas, el 40% están TOTAL ACUERDO con respecto a que los docentes fomenten la investigación. Se seleccionan al azar, 9 personas, ¿cuál es la probabilidad de que 3 personas hayan estado TOTAL ACUERDO?

$P = 0{,}40$
$N = 9$
$X = 3$

$$P(x = 3) = \frac{9!}{3(9-3)!} * 0{,}40^3 * 0{,}60^6$$

$$\frac{9 * 8 * 7 * 6!}{3! * 6!} * 0{,}40^3 * 0{,}60^6 = 0{,}25$$

- De acuerdo con la opinión de los encuestados, el 46% está en TOTAL ACUERDO en que lo nuevos docentes estén más capacitados. Se seleccionan al azar, 12 personas. Encuentre la probabilidad de que 7 personas estén en TOTAL ACUERDO con que los docentes se capaciten.

$$P = 0{,}46$$
$$N = 12$$
$$X = 7$$

$$P(x = 7) = \frac{12!}{7(12-7)!} * 0{,}46^7 * 0{,}54^5$$

$$\frac{12 * 11 * 10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5!}{7! * 5!} * 0{,}46^7 * 0{,}54^5 = 0{,}158$$

El 49% de los encuestados están en TOTAL ACUERDO con que los profesores tengan título de 4to nivel. Si se seleccionan al zar 8 personas, ¿cuál sería la probabilidad de que 5 estén en TOTAL ACUERDO?

$$P = 0{,}49$$
$$N = 8$$
$$X = 5$$

$$P(x = 3) = \frac{8!}{3(8-3)!} * 0{,}49^5 * 0{,}51^3$$

$$\frac{8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3!}{5! * 3!} * 0{,}49^5 * 0{,}51^3 = 0{,}209$$

Binomial negativa

- Se sabe que un alumno de CINT, en un semestre, tiene una probabilidad de 0.20 de quedarse en alguna materia. Calcule la probabilidad de que el 10mo alumno observado sea el 3ro que repruebe alguna materia

$$P = 0{,}20$$
$$N = 10$$
$$R = 3$$

$$P(x = 10) = \frac{10!}{3(10-3)!} * 0{,}20^3 * 0{,}80^7$$

$$\frac{10 * 9 * 8 * 7!}{3! * 7!} * 0{,}20^3 * 0{,}80^7 = 0{,}14$$

- El 30 % de los alumnos encuestados estuvieron en TOTAL ACUERDO con la implementación de la nueva metodología de calificación. Calcule la probabilidad que el 5to alumno observado sea el 4to que haya votado TOTAL ACUERDO en la encuesta.

$$P = 0{,}3$$
$$N = 5$$
$$R = 3$$

$$P(x = 5) = \frac{5!}{3(5-3)!} * 0{,}3^3 * 0{,}7^2$$

$$\frac{5 * 4 * 3 * 2!}{3! * 2!} * 0{,}3^3 * 0{,}7^2 = 0{,}07$$

- En la encuesta realizada, el 42% de los encuestados afirmó estar DE ACUERDO con que el docente sea especializado en la materia que imparte. Si se seleccionan al azar 6 personas, calcule la probabilidad que 3 personas hayan marcado DE ACUERDO en la encuesta.

$$P = 0{,}42$$
$$N = 6$$
$$R = 3$$

$$P(x = 3) = \frac{6!}{3(6-3)!} * 0{,}42^3 * 0{,}58^3$$

$$\frac{6 * 5 * 4 * 3!}{3! * 3!} * 0{,}42^3 * 0{,}58^3 = 0{,}289$$

R: / De este 42% de alumnos que marcaron estar DE ACUERDO, se selecciona una muestra al azar de 6 alumnos. Si se considera que se toman 6 personas y con un 42% de probabilidades de que salga alguien que haya marcado estar DE ACUERDO, las probabilidades de encontrar 3 personas de las 6 escogidas que hayan marcado estar DE ACUERDO no son tan bajas, con un 28%.

- En la encuesta realizada, el 30% de los encuestados afirmó estar TOTAL DE ACUERDO con la nueva metodología de calificación. Si se seleccionan al azar, 8 personas, calcule la probabilidad de que 5 personas hayan marcado TOTAL ACUERDO en la encuesta.

$$P = 0{,}30$$
$$N = 8$$
$$R = 5$$

$$P(x=8) = \frac{8!}{5(8-5)!} * 0{,}3^5 * 0{,}7^3$$

$$\frac{8*7*6*5*4*3!}{5!*3!} * 0{,}3^5 * 0{,}7^3 = 0{,}02$$

R: / De este 30% de alumnos que marcaron estar TOTALMENTE DE ACUERDO, se selecciona una muestra al azar, de 8 alumnos. Si se considera que se toman 8 personas y con un 30% de probabilidades de que salga alguien que haya marcado TOTALMENTE ACUERDO, las probabilidades de encontrar 5 personas de las 8 escogidas que hayan marcado estar DE ACUERDO son bajas, con un 2% de posibilidades.

- En la encuesta realizada, el 35% de los encuestados afirmó estar DE ACUERDO con la realización de actividades extracurriculares académicas. Si se seleccionan 10 personas al azar, calcule la probabilidad de que 5 personas hayan marcado ACUERDO en la encuesta.

$$P = 0{,}35$$
$$N = 10$$
$$R = 5$$

$$P(x=5) = \frac{10!}{5(5-5)!} * 0{,}35^5 * 0{,}65^5$$

$$\frac{10*9*8*7*6*5!}{5!*5!} * 0{,}35^5 * 0{,}65^5 = 0{,}15$$

R: / De este 35% de alumnos que marcaron estar DE ACUERDO, se selecciona una muestra al azar, de 10 alumnos. Si se considera que se toman 10 personas y con un 35% de probabilidades de que salga alguien que haya marcado TOTAL ACUERDO, las probabilidades de encontrar 5 personas de las 10 escogidas que hayan marcado estar DE ACUERDO son bajas, con un 15% de posibilidades.

Distribución geométrica

- La probabilidad que se obtuvo en un TOTAL ACUERDO en la Guía Docente es de 43%. ¿Cuál es la probabilidad de que 5 encuestados escogidos estuvieran DE ACUERDO?

$$P(X=x) = f(x)$$

$$P(X=5) = f(5) = (0{,}43)(0{,}57)^{5-1}$$

$$P(X=5) = 0{,}045$$

- El 40% de los encuestados están TOTAL ACUERDO a que los docentes fomenten la investigación. ¿Cuál es la probabilidad de que el séptimo encuestado haya marcado ACUERDO?

$$P(X = x) = f(x)$$

$$P(X = 7) = f(7) = (0{,}40)(0{,}60)^{7-1}$$

$$P(X = 7) = 0{,}018$$

- En la capacitación a docente se obtuvo el 46% de TOTAL ACUERDO en los encuestados. ¿Cuál es la probabilidad de que el tercer encuestado haya marcado TOTAL ACUERDO?

$$P(X = x) = f(x)$$

$$P(X = 3) = f(3) = (0{,}46)(0{,}54)^{3-1}$$

$$P(X = 3) = 0{,}13$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que el quinto encuestado este en TOTAL ACUERDO con que el docente tenga título de cuarto nivel? Se conoce que el 49% de los encuestados estuvieron en TOTAL ACUERDO.

$$P(X = x) = f(x)$$

$$P(X = 5) = f(5) = (0{,}49)(0{,}51)^{5-1}$$

$$P(X = 5) = 0{,}033$$

- La probabilidad de que un alumno cualquiera, de las 4 facultades estudiadas, apruebe todas las materias en un semestre es de 0.40. ¿Cuál es la probabilidad de que en su 3er semestre un alumno apruebe todas las materias?

$$P(X = x) = f(x)$$

$$P(X = 3) = f(3) = (0{,}4)(0{,}6)^{3-1}$$

$$P(X = 3) = 0{,}144$$

- De la encuesta realizada, el 32% de los encuestados afirmó estar DE ACUERDO con la nueva metodología de calificación. Si se seleccionan alumnos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el 3er alumno escogido haya marcado ACUERDO en la encuesta?

$P(X = x) = f(x)$

$P(X = 4) = f(4) = (0{,}32)(0{,}68)^{4-1}$

$P(X = 3) = 0{,}14$

R: / Las probabilidades como tal de encontrar a alguien que haya marcado estar DE ACUERDO en la encuesta, son algo bajas. Ahora, si se encuentra que el 3er alumno escogido al azar haya marcado estar DE ACUERDO en la encuesta, las probabilidades son aún menores, de un 14%.

- En la encuesta realizada, el 39% de los encuestados afirmó estar TOTALMENTE DE ACUERDO con que el docente sea especializado en la materia que imparte. Si se seleccionan alumnos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el 4to alumno escogido haya marcado TOTAL ACUERDO en la encuesta?

$P(X = x) = f(x)$

$P(X = 4) = f(4) = (0{,}39)(0{,}61)^{4-1}$

$P(X = 3) = 0{,}08$

R: / Las probabilidades como tal, de encontrar a alguien que haya marcado TOTALMENTE DE ACUERDO en la encuesta son bastantes bajas. Ahora, si se busca que el 4to alumno escogido al azar haya marcado TOTALMENTE DE ACUERDO en la encuesta, las probabilidades son aún menores, de un 8%.

- En la encuesta realizada, el 17% de los encuestados afirmó estar INDIFERENTE en cuanto a la realización de actividades académicas extracurriculares. Si se seleccionan alumnos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el 4to alumno escogido haya marcado INDIFERENTE en la encuesta?

$P(X = x) = f(x)$

$P(X = 4) = f(4) = (0{,}17)(0{,}83)^{4-1}$

$P(X = 3) = 0{,}09$

R: / Las probabilidades de encontrar a alguien que haya marcado INDIFERENTE en la encuesta son bastantes bajas. Ahora, si se busca que el 4to alumno escogido al azar haya marcado INDIFERENTE en la encuesta, las probabilidades son aún menores, de un 9%.

Distribución hipergeométrica

Se obtienen los siguientes datos con respecto a la opinión de que los docentes obtengan el título de cuarto nivel. 97 opinan que están en TOTAL ACUERDO, si se escoge una muestra de 51 de ellos trabajan, si se escoge al azar una muestra de 35 encuestados. Calcule:

a) Ninguno está en TOTAL ACUERDO.
b) Al menos 1 está en TOTAL ACUERDO

$$N = 97$$
$$K = 51$$
$$N = 35$$
$$X = 0$$

Desarrollo

Literal (a)

$$P(X=0) = f(0) = \frac{\binom{51}{0}\binom{97-51}{35-0}}{\binom{97}{35}}$$

$$f(0) = \frac{\left(\frac{51!}{0!\,(51!)}\right)\left(\frac{46!}{35!\,(11!)}\right)}{\left(\frac{97!}{35!\,(62!)}\right)}$$

$$f(0) = \frac{(1{,}3340 * 10^{10})}{(12{,}958 * 10^{26})} = 0{,}00045$$

Literal (b)

$$P(X \geq 1) = 1 - f(0)$$

$$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}00045 = 0{,}9995$$

- Con respecto a la pregunta sobre el fomentar la investigación se obtuvo en las encuestas que 80 de los encuestados opinan TOTAL ACUERDO. De los cuales 13 son de la CINT y son masculinos. Se escoge al azar una muestra de 5 encuestados. Calcule que:

a) Ninguno esté en TOTAL ACUERDO.
b) Al menos 1 esté en TOTAL ACUERDO.

$N = 80$
$K = 13$
$N = 5$
$X = 0$

Desarrollo

Literal (a)

$$P(X = 0) = f(0) = \frac{\binom{13}{0}\binom{80-13}{5-0}}{\binom{80}{5}}$$

$$f(0) = \frac{\left(\frac{13!}{0!\,(13!)}\right)\left(\frac{67!}{5!\,(62!)}\right)}{\left(\frac{80!}{5!\,(75!)}\right)}$$

$$f(0) = \frac{(9657648)}{(24040016)} = 0{,}40$$

Literal (b)

$$P(X \geq 1) = 1 - f(0)$$

$$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}40 = 0{,}60$$

- 85 de los encuestados están DE ACUERDO sobre la guía docente. De ellos 54 son féminas. Se escoge una muestra al azar de 15 encuestados. Calcule que:
  a) Ninguno esté en TOTAL ACUERDO.
  b) Al menos 1 esté en TOTAL ACUERDO.

$N = 85$
$K = 54$
$N = 15$
$X = 0$

Desarrollo

Literal (a)

$$P(X = 0) = f(0) = \frac{\binom{54}{0}\binom{85-54}{15-0}}{\binom{80}{5}}$$

$$f(0) = \frac{\left(\frac{54!}{0!\,(54!)}\right)\left(\frac{31!}{15!\,(16!)}\right)}{\left(\frac{85!}{15!\,(70!)}\right)}$$

$$f(0) = \frac{(21929 * 10^{-25})}{(1{,}64)} = 1{,}33 * 10^{-2}$$

Literal (b)

$$P(X \geq 1) = 1 - f(0)$$

$$P(X \geq 1) = 1 - 1{,}33 * 10^{-2} = 0{,}33 * 10^{15}$$

- De los 31 encuestados de Licenciatura Sistemas de Información, 10 de ellos son casados y el resto solteros. Si se eligen 3 personas al azar, calcule la probabilidad de que los 3 sean solteros.

$$P(X = 3) = f(3) = \frac{\binom{21}{3}\binom{10}{0}}{\binom{31}{3}}$$

$$f(0) = \frac{1330}{4495} = 0{,}29$$

- De los 10 encuestados que están en TOTAL DESACUERDO sobre la nueva metodología de calificación, 6 son de sexo masculino. Si se escogen al azar 4 de los 10 alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que 2 sean del sexo femenino?

$$P(X = 4) = f(4) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{2}}{\binom{10}{4}}$$

$$f(0) = \frac{90}{210} = 0{,}42$$

R: / Al tener 10 personas como muestra, y un 60% de ellos del sexo masculino, escoger 4 personas y que la mitad de ellos salgan femeninos, hace que las probabilidades sean bastante buenas, de un 42%.

- De los 18 encuestados que están en DESACUERDO con que el docente sea especializado en la materia que imparte, 4 de ellos tienen 21 años. Si se escogen al azar 5 de ellos, ¿cuál es la probabilidad de que 1 tenga 21 años?

$$P(X=4)=f(4)=\frac{\binom{4}{1}\binom{14}{3}}{\binom{18}{4}}$$

$$f(0)=\frac{1456}{3060}=0{,}47$$

R: / Al tener 18 personas como muestra, y apenas 4 de ellos con 21 años, escoger 5 personas y que se obtenga 1 de 21 años, hace que las probabilidades sean bastantes buenas, de un 47%.

- De los 10 encuestados que están en TOTAL DESACUERDO sobre la realización de actividades extracurriculares, 7 son del sexo femenino. Si se escogen al azar 3 de los 10 alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que salgan los 3 del sexo masculino?

$$P(X=3)=f(3)=\frac{\binom{3}{3}\binom{7}{0}}{\binom{10}{3}}$$

$$f(0)=\frac{1}{120}=0{,}008$$

R: / Al tener 10 personas como muestra, y apenas un 30% de ellos del sexo masculino, escoger 3 personas y que, justo las 3 salgan del sexo masculino, hace que las probabilidades se reduzcan por debajo de un 1%, dando como resultado 0.008.

Distribución Poisson

- En las encuestas realizadas se obtiene información del sexo, al extraer 10 datos del sexo en promedio de una hora. Suponiendo que es una variable de distribución de Poisson determine la probabilidad de:

a) En cualquier hora se extrae un dato.
b) En ½ hora se extrae 5 datos del sexo.

Desarrollo

Literal (a)

$$X=10$$

$$x=1$$

$$P(X=1)=f(1)=\frac{e^{-10}*10^{1}}{1!}=0{,}00045$$

R: / Existe una probabilidad de 0,00045 en poder extraer un dato, del sexo femenino.

Literal (b)

$$X = 10; 1\ hora \rightarrow \frac{1}{2} hora = 5$$

$$x = 5$$

$$P(X = 5) = f(5) = \frac{e^{-5} * 5^5}{5!} = 0{,}175$$

R: / Existe una probabilidad de extraer 5 datos del sexo femenino, en media hora.

- De las personas encuestadas se escoge un grupo de 10 estudiantes en edad de 23 años, para participar en una charla que se efectúa en 1 hora. Calcule la probabilidad de que:

a) En cualquier hora participen solo 4 estudiantes.
b) En cualquier hora participen al menos 2 estudiantes.

Desarrollo

Literal (a)

$$X = 10$$

$$x = 4$$

$$P(X = 4) = f(1) = \frac{e^{-10} * 10^4}{4!} = 0{,}0189$$

R: / Existe una probabilidad de 0,0189 en que participen 4 estudiantes.

Literal (b)

$$P(X \geq 2) = 1 - (x \leq 1) = 1 - (f(0) + f(1))$$

$$f(0) = \frac{e^{-10} * 10^0}{0!} = 0{,}000045$$

$$f(1) = \frac{e^{-10} * 10^1}{1!} = 0{,}000453$$

$$P(X > 2) = 1 - (0{,}000045 + 0{,}000453)$$

$$= 1 - 0{,}000498$$

$$= 0{,}999$$

R: / Existe una probabilidad de 0,999 en que participen al menos dos estudiantes.

- Para participar en un taller de robótica se escogen a 5 estudiantes de la CISC para competir con otras universidades, esto es en un promedio de 1 hora. Calcule lo siguiente:

a) Que en cualquier hora participen solo 2 estudiantes de la CISC.
b) Que en cualquier hora participen al menos 3 estudiantes.

Desarrollo

Literal (a)

$$X = 5$$

$$x = 2$$

$$P(X = 2) = f(2) = \frac{e^{-5} * 10^2}{2!} = 0{,}0842$$

R: / Existe una probabilidad de 0,0842 en que participen 2 estudiantes.

Literal (b)

$$P(X \geq 3) = 1 - (x \leq 2) = 1 - (f(0) + f(1) + f(2))$$

$$f(0) = \frac{e^{-5} * 5^0}{0!} = 0{,}00673$$

$$f(1) = \frac{e^{-5} * 5^1}{1!} = 0{,}0336$$

$$f(2) = \frac{e^{-5} * 5^2}{2!} = 0{,}0842$$

$$P(X > 3) = 1 - (0{,}00673 + 0{,}0336 + 0{,}0842)$$

$$= 1 - 0{,}125$$

$$= 0{,}875$$

R: / Existe una probabilidad de 0,875 en que participen al menos tres estudiantes.

- Al ingresar los datos de los encuestados en la base de datos se cometen errores de transmisión. En 1 hora el promedio es de 8 referentes al nivel de las carreras técnicas. Determine la probabilidad de que:

a) En una hora ocurran 5 errores.
b) En cualquier hora ocurran al menos 3 errores de ingreso.

Desarrollo

Literal (a)

$X = 8$

$x = 5$

$$P(X = 5) = f(5) = \frac{e^{-8} * 8^5}{5!} = 0{,}091$$

R: / Existe una probabilidad de 0,091 en que ocurran 5 errores.

Literal (b)

$P(X \geq 3) = 1 - (x \leq 2) = 1 - (f(0) + f(1) + f(2))$

$f(0) = \frac{e^{-8} * 8^0}{0!} = 0{,}000335$

$f(1) = \frac{e^{-8} * 8^1}{1!} = 0{,}00268$

$f(2) = \frac{e^{-8} * 8^2}{2!} = 0{,}01$

$$P(X > 3) = 1 - (0{,}000335 + 0{,}00268 + 0{,}01)$$

$$= 1 - 0{,}013$$

$$= 0{,}987$$

R: / Existe una probabilidad de 0,987 en que ocurran 3 errores de ingreso.

Capítulo 6 Probabilidades: aplicaciones a la ingeniería de procesos. Caso de estudio

6.1 El uso del modelamiento probabilístico como base de la simulación de sistemas

> La probabilidad es un campo donde los modelos simples se componen entre sí de una forma muy potente, partiendo de unas pocas ideas estocásticas fundamentales. Aún así, la matemática de la probabilidad es muy compleja, más allá de unos pocos desarrollos elementales y sus resultados son bastante contraintuitivos. La simulación o sustitución de un experimento aleatorio por otro equivalente, como modelo pseudo concreto de la situación modelada, permite prescindir del aparato matemático para analizar situaciones estocásticas. Como recurso didáctico, puede ayudar a comprender la diferencia entre modelo y realidad, y a mejorar las intuiciones sobre la aleatoriedad. Como contrapartida, la simulación no nos proporciona justificaciones ni demostraciones, que debemos buscar de nuevo en el modelo matemático (Batanero, 2001, p. 38).
>
> La construcción de modelos, su comparación con la realidad y su perfeccionamiento progresivo intervienen en cada fase de la resolución de problemas estadísticos, no solo en el análisis de datos en situaciones prácticas, sino también en el trabajo de desarrollo teórico. Un ejemplo notable de modelación estadística a partir de un problema práctico son las distribuciones de probabilidad, que permiten describir en forma sintética el comportamiento de las distribuciones empíricas de datos estadísticos y hacer predicciones sobre su comportamiento (Batanero, 2002, p. 39).

6.2. La aleatoriedad como modelo matemático

> Una característica particular de la estadística y de la probabilidad es la existencia de problemas filosóficos ligados a la definición e interpretación de algunos de sus conceptos básicos. Aunque la teoría matemática correspondiente no presenta ninguna contradicción y está bien asentada a partir de la axiomática de Kolmogorov, sin embargo, al intentar aplicar en situaciones prácticas las ideas estocásticas fundamentales, nos encontramos con frecuencia dificultades y paradojas. Esto ocurre precisamente, porque olvidamos la diferencia entre el modelo y la realidad, y porque no podemos encontrar en la matemática un criterio que aplicado mecánicamente nos lleve a la decisión de aceptar o rechazar un modelo para describir una cierta parcela de la realidad (Batanero, 200, p. 119).

Por otro lado, la simulación pone en correspondencia los experimentos aleatorios. Al trabajar mediante simulación estamos ya modelando, porque debemos no solo simplificar la realidad, sino fijar los aspectos que queremos simular y especificar, o sea, unas hipótesis matemáticas sobre el fenómeno estudiado.

Capítulo 7. Aplicación de la distribución de Poisson para dar solución a la gestión en el servicio de farmacias

Las distribuciones de probabilidad de Poisson y exponencial negativa son utilizadas frecuentemente en problemas de la teoría de colas. La distribución de Poisson representa un número de sucesos independientes que ocurren a una velocidad constante dentro de un intervalo de tiempo específico, expresado en unidades que van, por ejemplo, desde segundos hasta años.

Permite modelar situaciones tan diversas como el número de llamadas que llegan a una central telefónica, el número de bacterias que se reproducen en una cierta población, el tiempo que pueda durar una vía cerrada a causa de un derrumbe, el número de personas que llegan a un autoservicio o la cantidad de seguros solicitados a una aseguradora

La teoría de colas estudia el comportamiento de los sistemas de atención, en que los clientes eventualmente esperan por el servicio. Su fundador es el matemático danés Agner Erlang (1878- 1929) quien aplicó en 1909 la teoría de las probabilidades al comportamiento de las conversaciones telefónicas. Este y otros trabajos permitieron comprender y controlar las redes de telefonía, cuyos altos costos obligaban a asignar de manera óptima los componentes electrónicos para mantener los tiempos de espera dentro de estándares aceptables.

Actualmente, no obstante, el costo del hardware es relativamente bajo, la teoría de colas sigue siendo relevante para las telecomunicaciones. Por ejemplo, orienta la administración de los centros de llamadas (call-centers en inglés), una industria que emplea aproximadamente un 3% de la fuerza laboral de EE.UU. y del Reino Unido, y que crece a una tasa anual de 20% (Koole y Mandelbaum, 2002). Hoy en día los costos están principalmente determinados por el personal empleado, que para algunos servicios requiere un alto grado de especialización técnica, y por ende, su costo es significativo.

Los modelos de colas apoyan la toma de decisiones del centro de llamadas al identificar y relacionar los indicadores de desempeño de interés del administrador (por ejemplo, la capacidad instalada) y los de interés de sus clientes (por ejemplo, el tiempo de espera). Los modelos también ayudan a mejorar la calidad del servicio, estimando e informando al cliente cuánto tiempo debe esperar hasta ser atendido. Salvo cuando el requerimiento de servicio es de extrema urgencia, a veces las personas valoran más la puntualidad que la rapidez.

Después de realizar una encuesta a sus clientes, una compañía que distribuye gas licuado (Sección C.B) decidió cambiar su estrategia competitiva: desde intentar ser la más rápida en despachar a ser la más confiable. Incluso en el caso de las llamadas a la policía de menor gravedad, los ciudadanos prefieren que se les informe verazmente que el radio patrulla llegará en una hora más, a que se les deje en la incertidumbre y que se les atienda mucho antes de la hora (Larson, 1987).

La aplicabilidad de la teoría de colas es muy amplia en la administración de las organizaciones, pues el dilema entre la eficacia (dar un buen servicio) y la eficiencia (hacerlo con pocos recursos) es universal. Sin embargo, la formulación de los modelos es con frecuencia críptica. Las variables y parámetros no siempre tienen una interpretación directa al mundo concreto, haciendo que los modelos pierdan utilidad práctica. El objetivo de este acápite es vincular la teoría de colas a la gestión de las empresas y organizaciones.

Objetivos generales

- Identificar el nivel óptimo de capacidad del sistema que minimiza su coste global.
- Evaluar el impacto que las posibles alternativas de modificación de la capacidad del sistema tendrían en su coste total.
- Establecer un balance óptimo entre las consideraciones cuantitativas de costes y las cualitativas de servicio.
- Observar el tiempo de permanencia en el sistema o en la cola: la “paciencia” de los clientes depende del tipo de servicio específico considerado, y eso puede hacer que un cliente “abandone” el sistema.

Objetivos específicos

- Optimizar el tiempo de atención en ventanillas para mejorar la calidad en el servicio.
- Definir el número de clientes en la farmacia, en los momentos de mayor afluencia.
- Determinar cuál es el tiempo medio de espera en cada ventanilla

Recolección de datos

Para el desarrollo del análisis se observó la afluencia de clientes en la farmacia.

1. Cantidad de clientes que arriban a la farmacia.
2. Tiempo entre llegadas.
3. Demora en ventanilla.
4. Tiempo de espera del cliente.

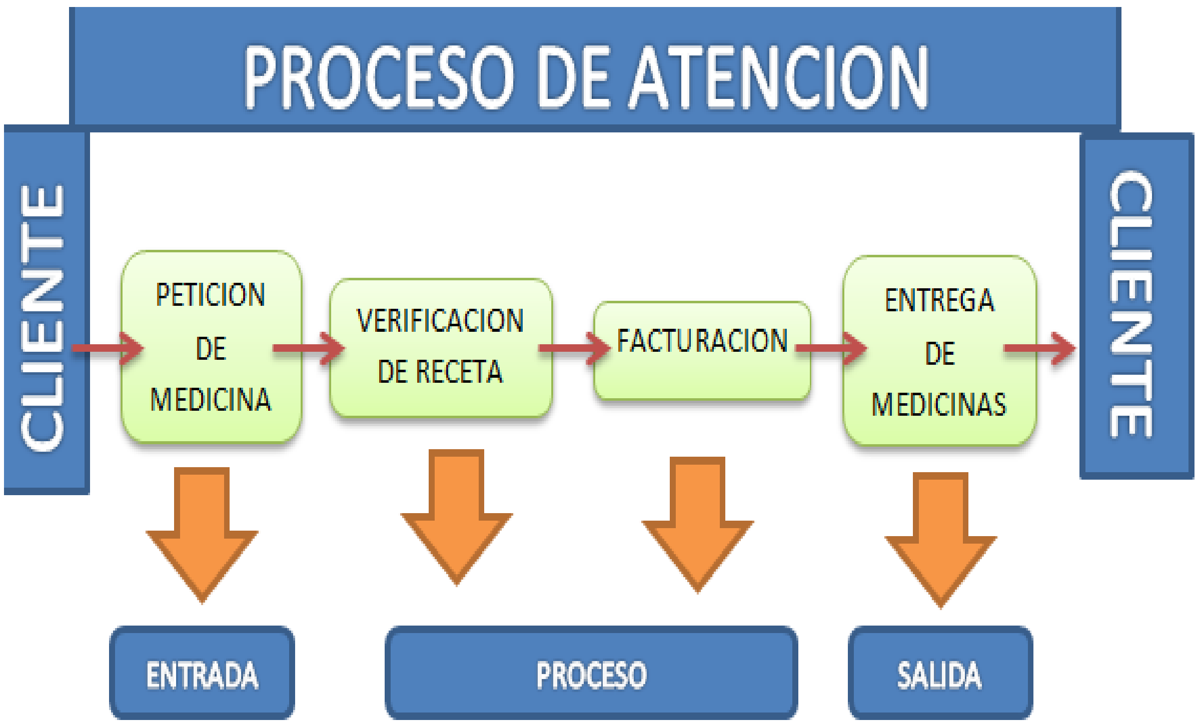
La recolección de datos se obtuvo mediante la aplicación de la caracterización del sistema de servicio. Esto consiste en clasificar el comportamiento de los clientes a su llegada a la farmacia, dependiendo de su petición de arribo

.

Con las características antes mencionadas, los datos utilizados en este trabajo corresponden a:

- Los arribos de clientes a la farmacia (teniendo en cuenta que es la única del sector).
- Tipo de días: ordinarios (ninguno de los días es feriado, ni fin de semana, ni quincena, ni fin de mes; que se sabe que tienen comportamiento inusual).

Descripción del proceso



Materiales y Métodos

Características de la teoría de colas

La llegada

Se describe de acuerdo con su distribución estadística de llegadas por unidad de tiempo o distribución de tiempo entre llegadas. Esto hace necesario la utilización de la distribución Poisson y la distribución Exponencial respectivamente.

Distribución Poisson

La distribución Poisson fue creada por el matemático francés Simeon Poisson. La distribución mide la probabilidad de un evento aleatorio sobre algún intervalo de tiempo.

Si se conoce que las llegadas ocurren a una velocidad promedio constante y son independientes una de la otra, puede aplicarse la siguiente fórmula de la distribución Poisson.

Donde:

$$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

e = es la base del logaritmo natural 2.71828
x = es el número de veces que ocurre el evento
µ = es el número promedio de ocurrencias por unidad de tiempo
P(x) = probabilidad de n llegadas en el tiempo T.

Distribución Exponencial

Mide el paso del tiempo entre ocurrencias, estima el lapso de tiempo entre arribos. Para tales efectos se utiliza la siguiente fórmula.
Donde:

$$P\ (X \leq x) = 1 - \ell^{-\mu t}$$

P(X ≤ x) = probabilidad de que el tiempo entre llegadas X sea ≤ a un valor dado en x
t = el lapso de tiempo
e = es la base del logaritmo natural 2.71828
µ = es la tasa promedio de ocurrencia.

Características de las llegadas

a) Tamaño de la población fuente: el tamaño de la población puede ser ilimitada o infinita, en este caso solamente llega una parte de la población. Limitada o finita se refiere a que existe un número exacto de unidades que pueden entrar al sistema, y posteriormente, no hay unidades que pueden ingresar.
b) Patrón de llegadas al sistema: las llegadas se consideran aleatorias cuando su ocurrencia es independiente una de la otra y no puede ser predicha con exactitud.
c) Comportamiento de las llegadas: la mayoría de los modelos de colas asumen que los clientes son tolerantes, es decir, que entran al sistema y permanecen en él, hasta ser atendidos, pero realmente los clientes tienden a frustrarse. Ello provoca que algunos no se unan a la cola debido a la longitud que esta posee, estos son los llamados clientes arrepentidos. Existen otros que sí se unen a la cola, pero al permanecer demasiado tiempo, deciden abandonarla, estos son los llamados, clientes desertores.

La cola

Cuando se habla de cola es necesario mencionar que la longitud de esta puede ser finita o infinita. Una cola es limitada cuando no puede, por leyes o restricciones físicas crecer a una longitud infinita, y se dice que una cola es ilimitada cuando su tamaño no está restringido.

La cola también afecta el modelo de teoría de colas que se formule, por lo que es necesario especificar la disciplina de cola para describir la manera de atender las llegadas.

Disciplina de colas

La disciplina de colas es la regla de prioridad que determina a qué cliente atender a continuación y dentro de estas se encuentran:

a) FIFO: por sus siglas en inglés (f*irst in, first out*) en el que se le da servicio al primero que ha llegado. Es el que se encuentra en el primer lugar de la fila, de forma que la cola está ordenada de acuerdo al orden de llegada de los clientes.
b) EDD: por sus siglas en inglés (*earling due date*) con esta disciplina se atiende al cliente que tenga la fecha más próxima de vencimiento.
c) SPT: por sus siglas en inglés (*shortest processing time*) en esta disciplina se atiende primero al cliente cuyo proceso de servicio sea más corto, es decir, en el que se invierta menor tiempo de atención.
d) SIRO: por sus siglas en inglés (*service in, random order*) se sortea aleatoriamente a cuál de los usuarios se le prestará el servicio.

La segunda característica de la teoría de colas es la cola propiamente dicha, en la que se toma la decisión de qué cliente se atenderá. La disciplina de atender primero al que se encuentre primero en la cola, impide que los nuevos clientes se ubiquen al frente de la cola y los otros clientes deban esperar mayor tiempo.

Medidas o parámetros de la teoría de colas

La teoría de colas posee medidas o parámetros para los distintos modelos de colas, y se especifican mediante la siguiente nomenclatura.

λ= Tasa promedio de llegada: se refiere al número de unidades que llegan en determinado período, al sistema.

μ= Velocidad media del servicio: se refiere al número de unidades que el prestador del servicio atiende en determinado período de tiempo.

1/ λ= Tiempo promedio entre llegadas: se refiere al tiempo que transcurre entre una y otra llegada al sistema.

1/µ = Tasa media de servicio: es el tiempo que utiliza el prestador del servicio para atender una y otra unidad.

p = Factor de utilización del prestador del servicio: se refiere al tiempo que realmente trabaja el prestador del servicio en atención al cliente.

Po = Probabilidad de sistema vacío: este parámetro se refiere a la probabilidad que cero unidades se encuentren en el sistema en determinado período.

Lq = Número promedio de unidades en la cola: se refiere al número de piezas, máquinas o personas que se encuentran esperando recibir servicio.

Ls = Número promedio de unidades en el sistema: se refiere a las unidades que se encuentran en el sistema, entre ellas las que están haciendo cola y las que están siendo atendidas.

Wq = Tiempo promedio que espera en la cola: se refiere al tiempo que trascurre desde que ingresa el cliente al sistema, hasta el momento en que es atendido por el prestador del servicio.

Ws = Tiempo promedio en el sistema: esta cantidad comprende desde el momento en que entra un usuario al sistema, el tiempo que permanece haciendo cola y el tiempo que invierte el empleado en prestar el servicio.

Wq = se refiere al tiempo de espera de una unidad en la cola antes de que comience el servicio.

Ws = se refiere al tiempo total de espera, más el tiempo necesario para obtener el servicio.

La condición uniforme en teoría de colas se logra solamente cuando µ es mayor que λ, es decir que la velocidad de servicio debe ser superior a la velocidad de llegadas para que se presente la condición uniforme. Por el contrario, cuando µ es menor o igual que λ el sistema de colas es inestable, ya que la línea puede acumularse potencialmente al infinito, debido a que las unidades llegan con mayor rapidez, en comparación con la prestación del servicio.

Modelos de la teoría de colas

Las instalaciones del servicio, como ya se mencionó, consisten en el personal y/o equipo necesario para proporcionar atención al cliente. Elegir un modelo de teoría de colas adecuado debe ser: según el volumen de los clientes y el carácter de los servicios ofrecidos.

El prestador del servicio es conocido como canal, y las disposiciones del servicio o los pasos necesarios para proporcionar el servicio al cliente se conoce como fase.

Modelo simple de teoría de colas

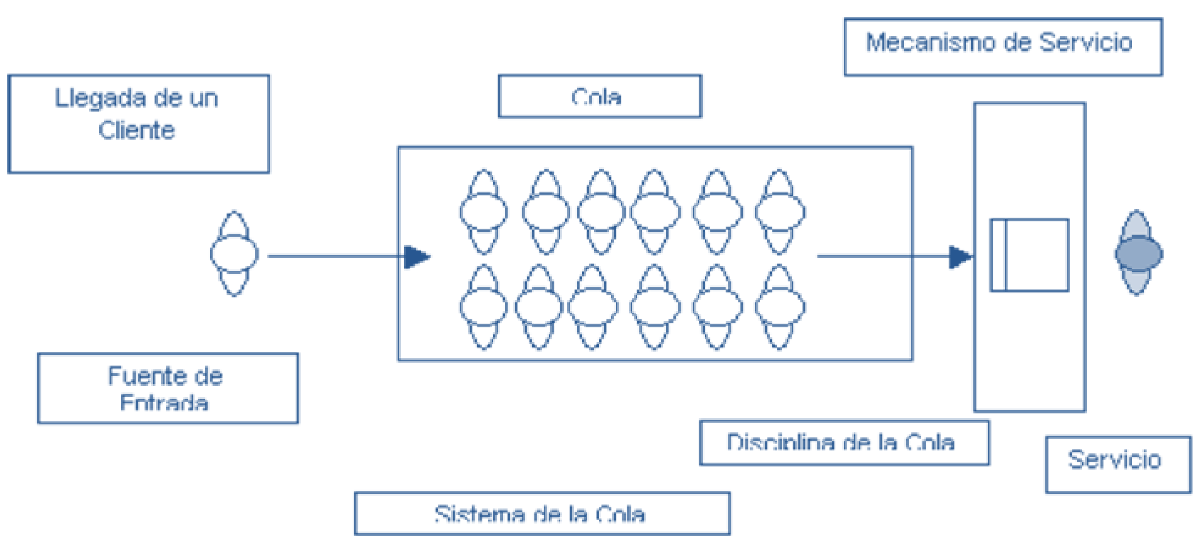
En el modelo de un solo canal y una sola fase, los clientes debe hacer una sola cola y circular uno a uno, para ser atendidos por el único prestador del servicio, que atenderá los requerimientos de los clientes. Este modelo de colas debe tener las siguientes condiciones:

a) Las llegadas son atendidas sobre la base del primero en entrar, primero en salir, y cada una de las llegadas espera el servicio, haciendo caso omiso de la longitud de la cola.
b) Cada entrada es independiente de la anterior.
c) Las llegadas son descritas por una distribución de probabilidad de Poisson y provienen de una población infinita.
d) Los tiempos de servicio varían de un cliente al siguiente y son independientes unos de los otros.
e) Los tiempos de servicio ocurren de acuerdo con la distribución de probabilidad exponencial.

$$p = \lambda/\mu \qquad Po = 1 - \lambda/\mu \qquad Ws = \frac{1}{(\mu - \lambda)}$$

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \qquad Ls = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \qquad Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

El modelo simple se conoce como M/M/1, es decir, que es un modelo de espera con llegadas aleatorias, distribución de servicio aleatorio y un solo canal de servicio. A partir de las condiciones anteriores se pueden desarrollar las siguientes ecuaciones.



Sistema de servicio

El sistema de servicio se refiere al número de filas y la disposición de la farmacia. Asimismo, se conoce como sistema de servicio al número de entidades físicas (llegadas) que buscan recibir servicio de instalaciones limitadas (servidores), como consecuencia las llegadas deben esperar en una línea su turno de servicio.

Variables de entrada del sistema colas

- Total de clientes que arriban a la farmacia.
- Tiempo promedio de arribo de los clientes a la farmacia.
- Tiempo promedio de permanencia en la cola de los clientes.
- Cantidad de servidores en el sistema.

Variables de salida del sistema de atención

- Tiempo promedio que demora el servidor en atender al cliente.
- Tiempo de servicio del cliente cuando recibe su paquete.

Problemática

Mediante la metodología de observación podemos analizar lo siguiente:

Intervalo	**Tiempo**
1	8:00 - 12:00
2	13:00 - 17:00
3	17:00 - 21:00

Tabla 1. Intervalo de tiempo en el que arriban los clientes a la farmacia.

DIAS	**NÚMERO DE PROMEDIO DE CLIENTES QUE ARRIBAN A LA FARMACIA**			**PROMEDIO DIARIO**
	1	**2**	**3**	
LUNES	25	32	32	**29,67**
MARTES	23	33	29	**28,33**
MIERCOLES	26	30	30	**28,67**
JUEVES	24	24	28	**25,33**
VIERNES	30	28	31	**29,67**
SÁBADO	31	29	27	**29,00**
	26,50	**29,33**	**29,50**	

Tabla 2. Número de clientes promedio que arribaron a la farmacia.

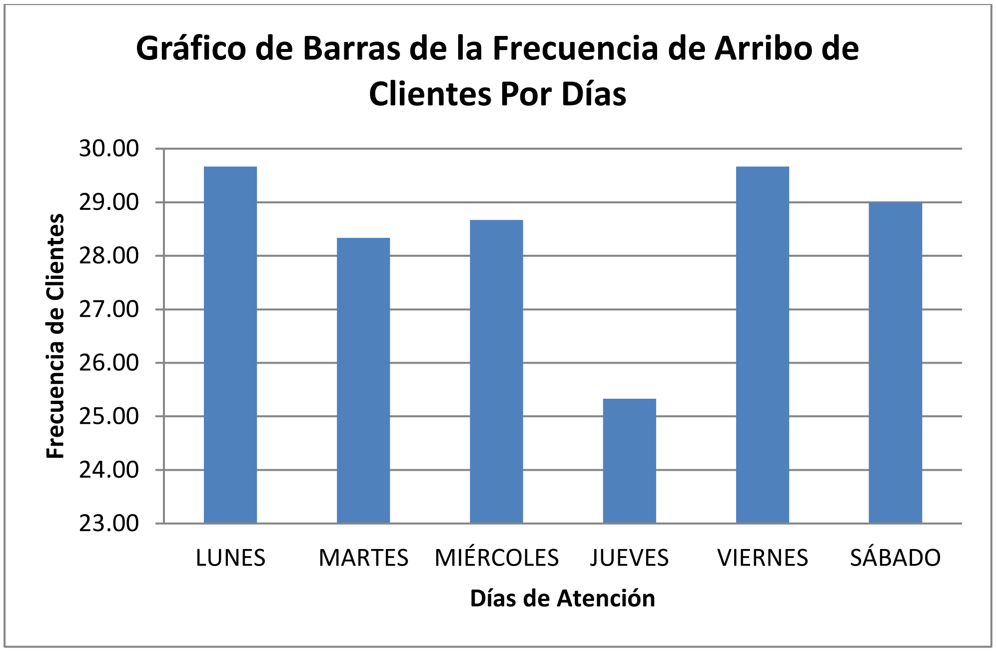


Grafico 1. Gráfico de barras de la frecuencia de arribo de clientes a la farmacia, por días de atención.

DIAS	**NÚMERO DE PROMEDIO DEL TIEMPO DE ATENCION DE LOS CLIENTES QUE ARRIBAN A LA FARMACIA**			**PROMEDIO DIARIO**
	1	2	3	
LUNES	250	320	320	297
MARTES	230	330	290	283
MIERCOLES	260	300	300	287
JUEVES	240	240	280	253
VIERNES	300	280	310	297
SÁBADO	310	290	270	290
	265,00	**293,33**	**295,00**	

Tabla 3. Número de promedio del tiempo de atención de los clientes que arriban a la farmacia (el tiempo esta expresado en minutos).

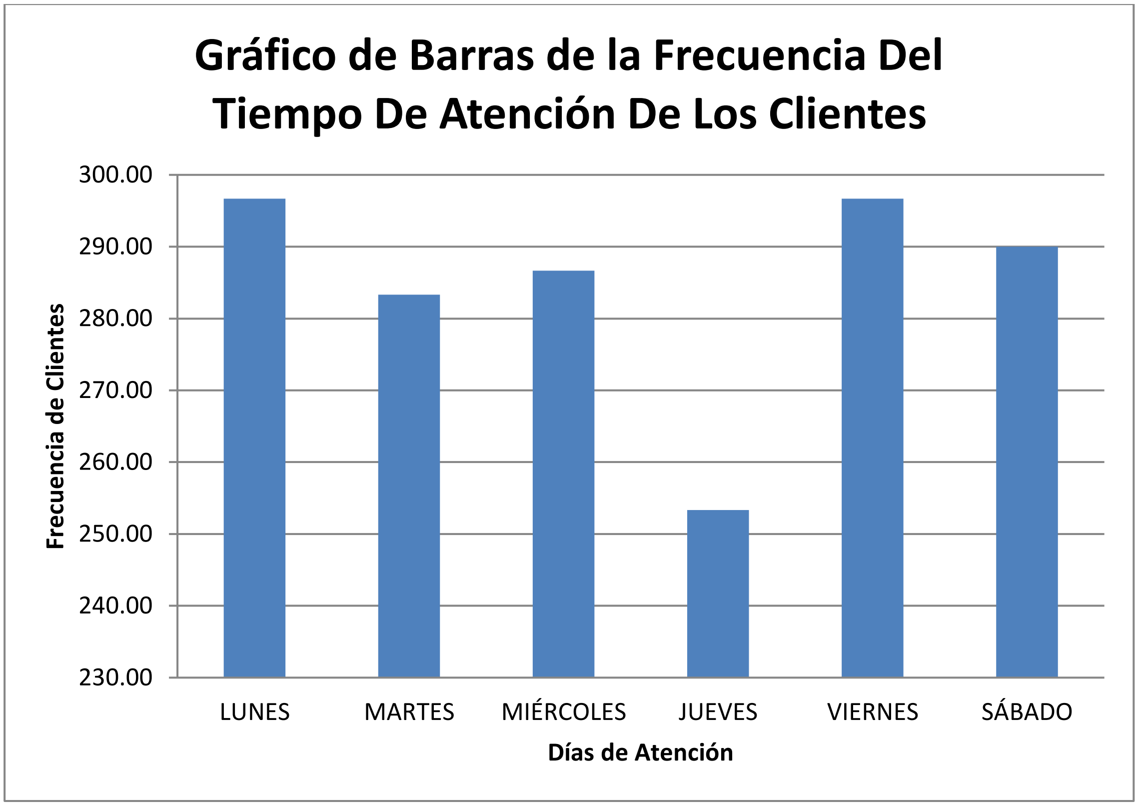


Gráfico 2. Gráfico de barras del tiempo de atención de los clientes que arriban a la farmacia.

7.1. Resultados. Aplicación del modelo de teoría de colas

Se aplicó la teoría de colas a una farmacia, la cual se encuentra situada en una zona no tan concurrida, pero a pesar de eso, por ser la única farmacia en el sector, la afluencia de clientes es considerable.

Mediante las observaciones realizadas se aplicó el modelo de teoría de colas a utilizar que tiene una notación de M/M/1.

- Tasa media de llegada λ= 8 clientes/hora
- Tasa media de servicio μ= 7 clientes/hora

Para calcular el factor de utilización se empleó la siguiente formula:

$$\rho = \frac{\lambda}{S\mu}$$

Donde λ es el número de llegadas por unidad de tiempo de los clientes al sistema de colas, μ es la tasa de servicio y S es el número de servidores atendiendo en el sistema. Para este estudio se contó con un solo servidor, es decir, una sola persona se puede observar en la formula a continuación.

$$\rho = \frac{8}{1(7)}$$

$\rho = 1{,}14$

Con el cálculo realizado podemos observar que (p ≥1), por lo que el sistema es inestable teniendo en cuenta que solo hay un servidor atendiendo a toda la demanda de clientes. Por cuanto gracias a la aplicación de las matemáticas se ha comprobado el desempeño del servidor.

RESUMEN DE RESULTADOS		
tasa de llegada:	**λ =**	8
tasa de servicio:	**μ =**	7
máximo número de servidores:	**S =**	2
factor de utilización:	**ρ =**	0,57
factor de no utilización:	**1-ρ =**	0,43
clientes en el sistema:	**L =**	2,11
clientes en la cola:	**Lq =**	0,97
tiempo de espera promedio en el sistema :	**w =**	0,26 h - 15,7 min
tiempo de espera promedio en la cola:	**wq =**	0,12 h - 7,2 min

Tabla 4. Análisis del sistema de colas para dos servidores M/M/S

La tabla 4 muestra la utilización del sistema de colas del 57% y el porcentaje de tiempo ocioso moderado del 43%. La tasa media de llegada es λ= 8 clientes/hora. La simulación permitió calcular el número medio de servidores que deben atender para que el sistema de colas en la farmacia no colapse. Se aplica un modelo M/M/S de cola infinita, donde S corresponde el número de servidores, para este caso S=2.

Actualmente el tiempo de espera en la cola de la farmacia es de 8 minutos aproximadamente, con una desviación estándar de 10 minutos. Estos datos no parecen dramáticos para que exista una gran molestia en los clientes, sin embargo como las ventas varían y en el caso de que el cliente solicitara muchos medicamentos esta puede extenderse hasta 15 minutos, se afecta la imagen en general del servicio en la farmacia.

Con respecto a la variable: tiempo entre llegadas de los clientes a la farmacia, con los resultados obtenidos se evidenció que existe alguna anomalía o consideración especial sobre esta.

Se consideró añadir otra caja más (servidor) en la farmacia para que la cola disminuya, y así poder brindar una mejor atención a los clientes que arriben a la farmacia.

Se debe modificar el número actual de cajeros para lograr un balance apropiado entre el costo de proporcionar el servicio y la mejora en el proceso de atención de clientes en nuestra farmacia.

Bibliografía

Acuña, E. (2013). *Conceptos básicos de probabilidades*. Recuperado de: https://www.academia.edu/9037432/Edgar_Acu%C3%B1a_Cap%C3%ADtulo_5_Distribuciones_de_Probabilidades_132

Ángel. M. *Slideshare*. Recuperado de https://www.slideshare.net/greenangelvv/ses8-17432629

Arruda, J. R. C. & Antuña, J. M. (2001). Un sistema didáctico para la enseñanza-aprendizaje de la Física. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 23(3), 329-350.

Aznar, I., Raso, F. & Hinojo, M. A. (2017). Percepciones de los futuros docentes respecto al potencial de la ludificación y la inclusión de los videojuegos en los procesos de enseñanza-aprendizaje. *Revista Educar*, 53(1), 11-28.

Batanero, C. (2001). *Aleatoriedad, modelización, simulación*. Actas de las X Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, 119-130.

Batanero, C. (2002). *La simulación como instrumento de modelización en probabilidad*. Revista Educación y pedagogía, 15(35), 38-53.

Batanero, C. (2001). *Aleatoriedad, modelización, simulación*. Actas de las X Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, 119-130.

Benítez, G. M. (2007). *El proceso de enseñanza–aprendizaje: el acto didáctico*. NTIC, Interacción y aprendizaje en la universidad.

Botero, P. (2016). *Estadística Probabilística (Transversal).* Medellin: Uniremington.

Briones, M. (2015). *Teoría de Conjuntos*. Chile: Educación Chile.

Briones, M. (2017). *Teoría de Conjuntos* (Básica). Chile: Educación Chile.

Calderón, L. (2013). *Práctica y conceptos sobre la teoría de conjuntos*. Lima.

Castillo, C. (2016). *Teoría de Conjuntos*. Bucarabamga: PUV.

Castro, E. (2016). *Probabilidad y Estadística 2*.

Cevallos, J. (2013). *Academia Edu*. Recuperado de https://www.academia.edu/13433444/CLASIFICACI%C3%93N_DE_CONJUNTOS_POR_SU_RELACI%C3%93N?auto=download

De la Peña, G., & Velázquez, R. M. (2018). Algunas reflexiones sobre la teoría general de sistemas y el enfoque sistémico en las investigaciones científicas. *Revista Cubana de Educación Superior*, 37(2), 31-44.

Duarte, E. (2017). *Conjuntos y Operaciones*. Colombia: Eduadomath.

Escande, A. (2013). *Teoría de Conjuntos*. Uruguay: Inspección Matematica.

García, A. G., & Tuñón, M. I. (2004). El ciclo reflexivo cooperativo: un modelo didáctico para la enseñanza de las ciencias. *Revista electrónica de enseñanza de las ciencias*, 3(2), 148-160.

García, F. *Slideshare*. Recuperado de: https://www.slideshare.net/FelicianoGarciaRodriguez/diagramas-de-venn-operaciones-con-conjuntos?qid=b3168b2a-d8b0-4d3d-b368-49bd52ce6632&v=&b=&from_search=2

García, J. (2010). *Teoría de Colas*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.

Guasch, A. (2009). *Modelado y simulación: aplicación a procesos logísticos de fabricación y servicios*. Catalunya: Universidad Politécnica de Catalunya.

Guzmán. J. (2018). *Probabilidad y estadística (Ejercicios y Teoría).* Guayaquil: UG.

Guzmán, J. (2017). *Conjuntos Teoría*. Guayaquil, Guayas, Ecuador.

Hamdya, A. T. Investigación de operaciones. En Sistemas de colas. Capítulo 17.

Hillier, L. Investigación de operaciones. En *Teoría de colas*. Capítulo 17.

Huertaz, A. (2014). *Conjuntos 2*. Madrid: Universidad de Madrid.

Huertaz, M. (2013). *Conjuntos y Prácticas*.

Ivorra, C. (2012). *Operaciones con Conjuntos*. Recuperado de: https://www.uv.es/=ivorra/

Marqués, P. (2001). Algunas notas sobre el impacto de las TIC en la universidad. *Revista Educar*, (28), 083-98.

Martínez, A. (2014). *Axiomas de Conjuntos*. Cali (Colombia): jimbo.

Martínez, C. (2005). *Estadísticas y Muestreo*. Bogotá: Ecoe Ediciones.

Méndez, T., & Díaz, L. (2014). *Acercamientos a la aleatoriedad en la enseñanza obligatoria.*

Moya, M. (2010). Simulación de un proceso de Poisson no estacionario usando la metodología thinning. En Tecnología en Marcha pp. 68-80.

Ortega, A. (2013). *La Tic en las matemáticas- física (Conjuntos).*

Ramírez, K. (2014). *Yumpu*. Recuperado de: https://www.yumpu.com/es/document/view/14340429/-n-msc-kryscia-ramirez

Reino, M. (2016). *Slideshare*. Recuperado de: https://www.slideshare.net/michellreino/teoria-de-conjuntos-58776893

Rodríguez, R. (2013). *Algebra Lineal (Teoría de Conjuntos).*

Román, M. (2003). ¿Por qué los docentes no pueden desarrollar procesos de enseñanza aprendizaje de calidad en contextos sociales vulnerables. *Revista Persona y Sociedad*, 17(1), 113-128.

Valencia, C. (2012). *Tipos de Conjuntos*. Cali (Colombia).

Wilder, M. (2013). *Cardinalidad*. Palermo (Buenos Aires).