En el presente libro se resalta la importancia de las ecuaciones diferenciales para el estudio de fenómenos naturales. De forma general, se abordan contenidos relacionados con los teoremas y lemas preliminares, espacio de funciones, derivada e integral fraccionaria de Riemann-Liouville, derivada fraccionaria de Caputo, espacio de derivadas fraccionarias, espacio Sobolev Fraccionario $E_o^{a,p}$, propiedades del espacio fraccionario $E_o^{a,p}$, operador p-laplaciano fraccionario, problema estacionario fraccionario, problema no lineal con p-laplaciano fraccionario, formulación variacional, funcional de energía, variedad de Nehari y función de fibrado, comportamiento de la función mu, análisis de la función de fibrado, propiedades de la variedad de Nehari, y la existencia de solución débil del problema estacionario, problema parabólico fraccionario.

9 780311 000463

Cálculo fraccionario. Variedad de Nehari y un problema parabólico no lineal con derivadas fraccionarias

Cálculo fraccionario

Variedad de Nehari y un problema parabólico no lineal con derivadas fraccionarias

Raúl A. Sánchez Ancajima
Milton Fabián Peñaherrera
David Elías Dáger López
Janina Hellen Gutierrez
Jhon Ronald Barros

Cálculo fraccionario. Variedad de Nehari y un problema parabólico no lineal con derivadas fraccionarias
Raúl A. Sánchez Ancajima
Milton Fabián Peñaherrera Larenas
David Elías Dáger López
Janina Hellen Gutierrez Molina
Jhon Ronald Barros Naranjo

Recepción: 11-03-2023
Aprobación: 02-06-2023

Cálculo fraccionario. Variedad de Nehari y un problema parabólico no lineal con derivadas fraccionarias

Diseño: Ing. Erik Marino Santos Pérez.

Traducción: Prof. Dr. C. Ernan Santiesteban Naranjo.

Corrección de estilo: Prof. Dra. C. Leydis Iglesias Triana.

Diagramación: Prof. Dr. C. Ernan Santiesteban Naranjo.

Director de Colección ciencias naturales & matemáticas: Prof. Dr. C. Carlos Manuel Caraballo Carmona.

Jefe de edición: Prof. Dra. C. Kenia María Velázquez Avila.

Dirección general: Prof. Dr. C. Ernan Santiesteban Naranjo.

Sobre la presente edición:

Primera edición

Esta obra ha sido evaluada por pares académicos a doble ciegos

Lectores/Pares académicos/Revisores: 0009 & 0054

Editorial Tecnocientífica Americana

Domicilio legal: calle 613sw 15th, en Amarillo, Texas. **ZIP**: 79104, EEUU

Teléfono: 7867769991

Fecha de publicación: 22 junio de 2023

Código BIC: PBWH **Código EAN: 9780311000463**

Código UPC: 978031100046 **ISBN: 978-0-3110-0046-3**

La Editorial Tecnocientífica Americana se encuentra indizada en, referenciada en o tiene convenios con, entre otras, las siguientes bases de datos:

Cálculo Fraccionario. Variedad de Nehari y un problema parabólico no lineal con derivadas fraccionaria

Raúl A. Sánchez Ancajima
Milton Fabián Peñaherrera Larenas
David Elías Dáger López
Janina Hellen Gutierrez Molina
Jhon Ronald Barros Naranjo

9 780311 000463
Recepción: 11-03-2023
Aprobación: 02-06-2023

Índice general

1. Introducción………..01
2. Preliminares ………-05
2.1. Teoremas y lemas preliminares ………………………………………………………………………………05
2.1.1. Espacio de funciones……………………………………………………………………………………..11
2.2. Derivada e Integral Fraccionaria de Riemann-Liouville…………………………………………………..12
2.3. Derivada Fraccionaria de Caputo…………………………………………………………………………………14
2.4. Espacio de derivadas fraccionarias……………………………………………………………………………..17
2.5. Espacio Sobolev Fraccionario $E_0^{\alpha,p}$ ……………………………………………………………………………19
2.5.1. Propiedades del Espacio Fraccionario $E_0^{\alpha,p}$ …………………………………………………………..20
2.6. Operador p-Laplaciano Fraccionario…………………………………………………………………………...22
3. Problema Estacionario Fraccionario………………………………………………………………………………...23
3.1. Problema no lineal con p-laplaciano fraccionario……………………………………………………………23
3.1.1. Formulación Variacional…………………………………………………………………………………….23
3.1.2. Funcional de Energía…………………………………………………………………………………………..35
3.2. Variedad de Nehari y Función de Fibrado ………………………………………………………………………..36
3.2.1. Función de fibrado…………………………………………………………………………………………………..38
3.2.2. Comportamiento de la función m_u………………………………………………………………………….44
3.2.3. Análisis de la Función de fibrado…………………………………………………………………………..46
3.3. Propiedades de la variedad de Nehari……………………………………………………………………….52
3.4. Existencia de Solución Débil del Problema Estacionario…………………………………………….56
4. Problema Parabólico Fraccionario………………………………………………………………………………………61
5. Conclusiones………..71
Referencias……73

1 — Introducción

El cálculo fraccionario encuentra su aplicación en diferentes áreas, por ejemplo, se puede citar aplicaciones en viscoelasticidad, electrónica, reacciones químicas, mecánica cuántica, semiconductores, propagación de ondas electromagnéticas y materiales, fenómenos de transporte por convección-difusión, vertidos de contaminantes en ríos, almacenamiento geológico profundo de residuos nucleares, problemas en biología marina, intrusión de sal marina en un estuario, la predicción del movimiento de pesticidas y fertilizantes a través del suelo [51, 29, 16, 62, 30, 31, 26, 5, 39, 20, 36, 50, 1, 33, 24].

Los trabajos citados en el párrafo anterior resaltan la importancia de las ecuaciones diferenciales para el estudio de fenómenos naturales; sin embargo, es necesario recordar que existen ecuaciones diferenciales que son difíciles de resolver en el sentido clásico. Esto se debe sencillamente a que los fenómenos del mundo real no admiten soluciones suficientemente suaves, de manera que, surge otra aternativa de solución como es el cálculo de variaciones con nuevas técnicas, como por ejemplo: método del punto fijo, el teorema de paso de la montaña, variedad de Nehari, entre otras, las que no buscan obtener una solución explícita, sino estudiar el comportamiento cualitativo: existencia, unicidad, estabilidad y regularidad de la solución. Estos métodos plantean una formulación débil del modelo (ecuación diferencial parcial) como única manera de resolver tales ecuaciones diferenciales. Recientemente, hay un gran interés en estudiar ecuaciones diferenciales con derivadas fraccionarias. Estas surgen en la teoría del cálculo de variaciones fraccionario y conducen a muchos problemas interesantes que, sin embargo, son difíciles de resolver explícitamente.

Además de sus posibles aplicaciones, la teoría de las ecuaciones diferenciales fraccionarias es un campo nuevo e interesante en la teoría del cálculo fraccionario. Las herramientas principales para el estudio de este tipo de ecuaciones diferenciales fraccionarias son la teoría de puntos críticos y los métodos variacionales. La idea central detrás de estos métodos es tratar de encontrar soluciones a un problema diferencial dado, buscando puntos críticos de un funcional de energía adecuado, el cual es definido en un espacio de funciones apropiado. Se debe notar que no es fácil utilizar la teoría de puntos críticos para estudiar problemas fraccionarios, ya que, a menudo, es muy difícil construir un espacio de funciones adecuado.

Existen algunos artículos que han permitido estudiar los diferentes métodos en esta área de investigación como es el trabajo de Pu y Cao (2017) quienes probaron existencia y multiplicidad de soluciones para una ecuación diferencial fraccionaria con condiciones de frontera, utilizando la función de fibrado y la variedad Nehari. Asimismo, el trabajo de Goyal y Sreenadh (2015) demostró existencia y multiplicidad de soluciones no negativas por minimización en el subconjunto adecuado de la variedad Nehari utilizando la función de fibrado. De la misma forma, el trabajo de Meilan et al. (2014) demostró la existencia de una solución débil para un problema p-Laplace y obtuvo resultados de existencia de soluciones débiles por medio de la variedad de Nehari, teorema de punto fijo y teorema Arzela-Ascoli. Por su parte, Brown et al. (2013) estudiaron una ecuación diferencial con condiciones de Dirichlety y demostraron cómo surgen los resultados de existencia y multiplicidad de soluciones, según la naturaleza de la variedad Nehari. Tsun-Wu (2008) estudiaron el número de soluciones para un sistema elíptico semilineal con función, peso que cambia de signo y con el método variedad Nehari demuestra que el sistema tiene al menos dos soluciones no triviales no negativas. Bronw (2004) demostró la existencia de solución déil para un problema elíptico con el método de la variedad de Nehari y con la teoría la bifurcación se analiza la no existencia de soluciones. Drábek et al. (1997) estudiaron la teoría de los problemas no lineales con valor de frontera para operadores elípticos y demostraron la existencia de soluciones débiles en espacios Sobolev con peso. Asimismo, Torres demostró la existencia de soluciones no triviales para un problema de Dirichlet con derivadas fraccionarias mixtas utilizando métodos variacionales y el teorema del paso de la montaña. Del mismo modo, Chen et al. utilizando la teoría de punto crítico, demuestra la existencia de soluciones débiles para un problema de frontera con derivada fraccionaria y p-Laplaciano. Por su parte, Meilan et al. demuestran la existencia de solución débil para un problema no lineal con derivada fraccionaria utlizando el método de la variedad de Nehari. Este último artículo mencionado es un antecedente importante para el objetivo del presente trabajo, y se describe a continuación:

$$
\begin{aligned}
D^{\beta}u(x,t) &= div(a(x)|\nabla u(x,t)|^{p-2}\nabla u(x,t)) + \lambda|u(x,t)|^{p-2}u(x,t) + b(x)|u(x,t)|^{\alpha-1}u(x,t), \text{en } \Omega_T\\
u(x,t) &= 0, \quad \text{en } \partial\Omega_T,\\
u(x,0) &= \phi(x), \quad \text{en } \Omega,\\
u_t(x,0) &= \psi(x), \quad \text{en } \Omega,
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado con frontera suave, $\Omega_T = \Omega \times [0,T]$, D^{β} denota derivada fraccionaria de Caputo [41], de orden $0 < \beta \leq 1$, además $1 < \alpha < p-1(2 < p \leq p^*(p^* = \frac{np}{n-p}))$, $b : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua que puede cambiar de signo, λ es un número real positivo, las funciones medibles que pertenecen al espacio de Sobolev $u,\ a \in W_0^{1,p}(a(x),\Omega)$, y finalmente $\phi(x),\ \psi(x) \in H_0^1$.

El caso estacionario del problema (1.1) es un importante modelo matemático, utilizado ampliamente en muchos campos. Para leer sobre la teoría específica implícita del modelo se puede ver los trabajos de Drabek et al., Fournier, Wu y Brown. Para el caso de evolución, ver los trabajos de Meilan y Pierantozzi.
Los trabajos de Torres, Chen y Meilan tienen una característica en común cuando plantean problemas que relacionan derivadas de orden entero con derivadas de orden fraccionario. Por ejemplo, Meilan demostró la existencia de solución débil para el caso estacionario considerando derivada de orden entero, y luego, demuestran existencia de solución débil para el problema no lineal (1.1) con derivada fraccionaria.
Motivados por los artículos mencionados, en este trabajo, abordamos un problema parabólico no lineal con derivadas fraccionarias, y a diferencia del trabajo de Meilan et al., que demostró la existencia de solución débil considerando derivada entera para la variable espacial y en un espacio $N-dimensional$, aquí se prueba existencia de solución débil considerando derivada fraccionaria para la variable espacial y temporal (se resalta la extensión del caso entero al caso fraccionario) en un espacio unidimensional. El problema parabólico no lineal es denotado por P_1 y es formulado bajo las siguientes condiciones:

$$P_1 \begin{cases} {}_0^cD_t^{\beta} u(x,t) = -\,{}_xD_{\Lambda}^{\alpha}(|\,{}_0D_x^{\alpha}u(x,t)|^{p-2}\,{}_0D_x^{\alpha}u(x,t)) + \lambda|u(x,t)|^{p-2}u(x,t) \\ \qquad\qquad + b(x)|u(x,t)|^{q-1}u(x,t), \quad (x,t)\in\Omega_T \\ u(0,t) = u(\Lambda,t) = 0, \quad t\in[0,T] \\ u(x,0) = \phi(x), \quad \text{en } [0.\Lambda], \\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad \text{en } [0,\Lambda], \end{cases}$$

Donde:

1. $\Omega_T = [0,\Lambda]\times[0,T]$,
2. ${}^cD^{\beta}$ y D^{α} derivadas fraccionarias de Caputo de orden $1<\beta<2$ y $\frac{1}{p}<\alpha<1$, para la variable temporal y espacial, respectivamente.
3. $1<q<p-1$, con $2<p<\infty$.
4. $b:[0,\Lambda]\to\mathbb{R}$ es una función contínua, $b\in L^{\infty}([0,\Lambda])$
5. $\phi(x),\ \psi(x)\in L^{\infty}[0,\Lambda]$.
6. λ es real positivo.
7. $u\in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$(espacio fraccionario, el cual será definido posteriormente).

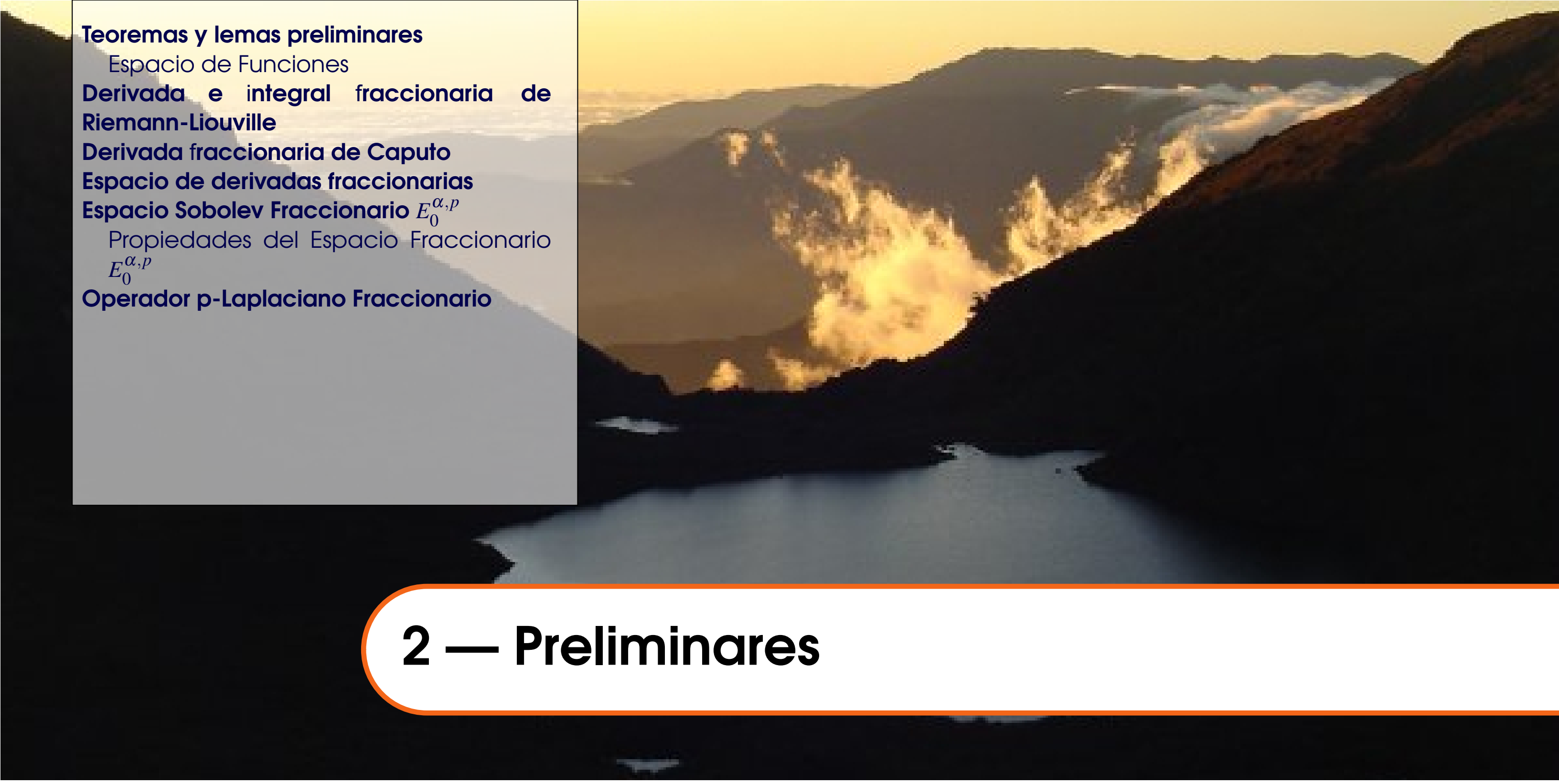
Además, el problema estacionario asociado al problema P_1 es:

$$P_0 \begin{cases} {}_xD_{\Lambda}^{\alpha}(|\,{}_0D_x^{\alpha}u(x)|^{p-2}\,{}_0D_x^{\alpha}u(x)) = \lambda|u(x)|^{p-2}u(x) + b(x)|u(x)|^{q-1}u(x), \quad x\in[0,\Lambda] \\ u(0) = u(\Lambda) = 0 \end{cases}$$

Donde: $\frac{1}{p}<\alpha<1$, y $1<q<p-1$, con, $2<p<\infty$, y $b\in L^{\infty}[0,\Lambda]$.
Para lograr el objetivo de demostrar exstencia de solución débil para el problema P_1, se demostrará primero existencia de solución débil para el problema P_0 Para ello se usa el método de la variedad de

Nehari, esto es porque ninguna minimización del funcional de energía asociado al problema P_0 es posible en todo el espacio fraccionario $E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$, por tanto es necesario restringirlo a la variedad de Nehari, dado que es un conjunto al cual pertenecen lo puntos críticos que son soluciones débiles del problema P_0, esto hace posible resolver el problema toda vez que un punto crítico del funcional de energía en ese conjunto será un punto crítico en todo el espacio fraccionario. Luego usando el teorema de punto fijo de Banach se demuestra existencia y unicidad de solución débil para el problema parabólico no lineal P_1.

El trabajo esta estructurado en cuatro capítulos. En el capítulo 1, se establece los conceptos básicos para el espacio de funciones, propiedades de integral y derivada fraccionaria, definición del espacio fraccionario, conceptos que son usados en los sucesivos capítulos. En el capítulo 2, se estudia el problema estacionario asociado al problema P_1, se define la variedad de Nehari y su relación con la función de fibrado para demostrar existencia de solución débil para el problema P_0. Asimismo, en el capítulo 3, se presenta el resultado principal de la tesis donde conjuntamente con los resultados de existencia de solución débil del problema P_0 y el teorema de punto fijo de Banach se logra demostrar existencia de solución débil para el problema parabólico no lineal con derivadas fraccionarias P_1. Finalmente, en el capítulo 4, se presenta las conclusiones.



Teoremas y lemas preliminares
Espacio de Funciones
Derivada e integral fraccionaria de Riemann-Liouville
Derivada fraccionaria de Caputo
Espacio de derivadas fraccionarias
Espacio Sobolev Fraccionario $E_0^{\alpha,p}$
Propiedades del Espacio Fraccionario $E_0^{\alpha,p}$
Operador p-Laplaciano Fraccionario

2 — Preliminares

En este capítulo, se establece las definiciones de los operadores fraccionarios, teoremas y resultados básicos del cálculo fraccionario que usamos a lo largo de las diferentes secciones.

2.1 Teoremas y lemas preliminares

Frecuentemente, es necesario calcular limite de una sucesión infinita de números reales, más no siempre existe el límite de cualquier sucesión de números reales [4].
Por tanto, es útil trabajar con el mayor y menor límite de todas las subsucesiones.
Sea $\{x_n\}$ una subsucesión infinita de número reales, si $+\infty$ y $-\infty$ son considerados también como límites entonces se puede afirmar que x_n posee al menos una subsucesión convergente. Así, si S es el conjunto de todos los límites de las subsucesiones de la sucesión $\{x_n\}$, entonces S es un subconjunto no vacío de la recta real extendida $\overline{\mathbb{R}}$. Luego, se sigue que S posee un supremo y un ínfimo [4].

Ejemplo 2.1

Si se considera la sucesón infinita de número reales

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{7}{8}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{15}{16}, \ldots$$

Como se puede observar, la sucesión $\{x_n\}$ no tiene límite, mas la subsucesión $x_1, x_4, x_7, \ldots$ converge a 1, la subsucesión $x_2, x_5, x_8, \ldots$ converge a 0 y la subsucesión $x_3, x_6, x_9, \ldots$ converge a -1. Luego, si $S = \{-1, 0, 1\}$, entonces 1 y -1 son el supremo e ínfimo de S respectivamente.
A los números 1 y -1 se les denomina el límite superior e inferior de la sucesión $\{x_n\}$ respectivamente.

Definición 2.1

[4] Sea $F = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de funciones de valor real definida sobre $E \subset \mathbb{R}$. Se dice que F es **uniformemente acotada** en E, cuando existe un $M > 0$ tal que, para todo $x \in E$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $|f_n(x)| < M$.

Ejemplo 2.2

La sucesión de funciones definida por $f_n(x) = \sin nx$, es una sucesión de funciones uniformemente acotada.

En efecto, dado $x \in \mathbb{R}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que $|f_n(x)| = |\sin nx| \leq 1 < 1+\varepsilon = M$.

Definición 2.2

[4] Sean $\mathscr{A}$ un conjunto arbitrario y $F = \{f_k\}_{k\in\mathscr{A}}$ una familia de funciones de valor real definida sobre $E \subset \mathbb{R}$. Se dice que F es **equicontinua** en E, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x_1, x_2 \in E$ que cumplen $|x_1 - x_2| < \delta$, se tiene $|f_k(x_1) - f_k(x_2)| < \varepsilon$ para todo k.

Ejemplo 2.3

La familia de funciones $\{f_k\}_{k\in[3,5]}$ definidas en $[0,1]$ mediante $f_k(x) = kx$, es una familia de funciones equicontinua.

En efecto, dado $\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 / \forall x_1, x_2 \in [0,1],\ si\ |x_1 - x_2| < \delta$, entonces $|f(x_1) - f(x_2)| = |\alpha x_1 - \alpha x_2| = |\alpha||x_1 - x_2| < 5\delta = \varepsilon$. Por tanto, para garantizar la existencia de δ es suficiente tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$.

Definición 2.3

[4] Sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de valor real definida sobre $E \subset \mathbb{R}$. Se dice que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformemente** en E a una función $f : E \to \mathbb{R}$, cuando para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que si $n > n_0, |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para cualquier $x \in E$.

Ejemplo 2.4

La sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, converge uniformemente a $f(x) = 0$.

En efecto, dado $\varepsilon > 0,\ \exists\ n_0\ /\ n > n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| = |0 - \frac{\sin nx}{n}| \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}$. Por tanto para garantizar la existencia de n_0 es suficiente tomar $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$.

Definición 2.4 (Límite superior e inferior)

[4] Se define el límite superior de sucesión $\{x_n\}$ como el supremo de S $(sup\ S)$ y se denota por

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \quad o \quad simplemente \quad \limsup x_n.$$

Análogamente, se define el límite inferior de $\{x_n\}$ como el ínfimo de $S(infS)$ y se denota por

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \quad o \quad simplemente \quad \liminf x_n.$$

Teorema 2.1

[4] Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Entonces se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = x.$$

Demostración. Ver el libro de Ash Robert[4] ■

Teorema 2.2 (Teorema del valor medio)

[4] Sea $f : [a,b] \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Si f es derivable en (a,b), existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

.

Demostración. Ver el libro de Ash Robert B. [4]. ■

Teorema 2.3 (Teorema fundamental del cálculo)

[4] Sea $f : I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua en el intervalo I. Las siguientes afirmaciones sobre la función $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son equivalentes:

1. F es una integral indefinida de f, esto es, existe $a \in I$ tal que

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt, \ \forall x \in I.$$

2. F es una primitiva de f, esto es, $F'(x) = f(x), \ \forall x \in I.$

Demostración. Ver el libro de Ash Robert B. [4]. ■

Definición 2.5

[34] Sea O un subconjunto abierto de un espacio de Hilbert H y $F : O \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Dado $c \in \mathbb{R}$ denotamos por

$$F^{-1}(c) = \{u \in O : F(u) = c\}. \tag{2.1}$$

Luego, sea $p \in \mathbb{R}$ es un valor regular de F si $\Delta F(u) \neq 0$ para todo $u \in F^{-1}(p)$. Además $p \in \mathbb{R}$ es un valor crítico de F si no es un valor regular de F.

Definición 2.6

[34] Se dice que un subconjunto no vacío M de H es una subvariedad de clase C^k de H si M es cerrado en H y existen un subconjunto abierto O de H una función $F : O \to \mathbb{R}$ de clase C^k y un valor regular p de F tales que

$$M = F^{-1}(p). \tag{2.2}$$

Proposición 2.1

[59] Sea $\phi : A \to \mathbb{R}$ donde A es un subconjunto abierto de un espacio vectorial normado X. Si ϕ posee una derivada de Gateaux contínua en A, entonces $\phi \in C^1(A;\mathbb{R})$.

Demostración. Ver el libro de Willem[59] (1997, cap.1) ■

Corolario 2.1 [48] Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y acotado y $1 \leq p < q \leq \infty$. Entonces

$$L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega). \tag{2.3}$$

Además, para todo $f \in L^q$, existe una constante C tal que

$$\|f\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}, \tag{2.4}$$

donde $C = [\mu(\Omega)]^{\frac{q-p}{pq}}$ si $q < \infty$ y $C = [\mu(\Omega)]^{\frac{1}{p}}$ si $q = \infty$.

Demostración. Ver el libro de Halsey Ryden [48](2010, cap. 7, pag. 142) ■

Teorema 2.4 (Desigualdad de Hölder)

Sea $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, con $1 \leq p, q \leq \infty$, y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)} \tag{2.5}$$

Demostración. Ver el libro de Brezis [6](2010, teorema 4.6, página 92). ■

Teorema 2.5 (Teorema de la Convergencia Dominada)

Sea (f_n) una sucesión de funciones en $L^1(\Omega)$, satisfaciendo:

(a) $f_n(x) \to f(x)$ c.t.p en Ω;

(b) Existe $g \in L_1(\Omega)$ tal que $|f_n| \leq g$ c.t.p $\forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces $f \in L^1(\Omega)$ es

$$\int_\Omega f_n dx \to \int_\Omega f dx$$

Demostración. Ver el libro de Brezis [6] (2010, teorema 4.2, página 90). ■

Teorema 2.6

Sea (u_n) una sucesión en $L^p(\Omega)$ y $u \in L^p(\Omega)$ tal que $u_n \to u$. Entonces existe una subsucesión (u_{n_k}) tal que:

(i) $(u_{n_k}) \to u$ c.t.p en Ω;

(ii) $|u_{n_k}| \leq h(x)$, para todo k natural y c.t.p y con $h \in L^p(\Omega)$.

Demostración. Ver el libro de Brezis [6] (2010, prop. 3.13, página 63). ■

Teorema 2.7 (Teorema de Arzela-Ascoli)

[15] Suponga que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones de valor real definidas en $\mathbb{R}^n$, tal que $|f_k(x)| \leq M \quad (k = 1,\ldots,x \in \mathbb{R}^n)$ para alguna constante M y que las funciones $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ son uniformemente equicontinuas, es decir que para $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon, \quad para \quad x,y \in \mathbb{R}^n, \; k = 1,\ldots$ Entonces existe una subsucesión $\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ y una función continua f, tal que $f_{k_j} \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.8 (Convergencia)

[6] Sea E un espacio vectorial normado y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ una sucesión. Entonces se cumple las siguientes propiedades:

(i) $\{x_n\} \rightharpoonup x \Leftrightarrow f(x_n) \to f(x)$, para todo $f \in E^*$.

(ii) Si $x_n \to x$ entonces $x_n \rightharpoonup x$.

(iii) Si $x_n \rightharpoonup x$, entonces x_n es acotada y además

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \tag{2.6}$$

Demostración. [6] Brezis (2010, Prop 3.15, página 63). ■

Definición 2.7 (Contracción)

[27] Sea X un espacio métrico completo, y sea $R \subset X$ un subconjunto cerrado, entonces la función $A : R \to R$ es una contracción si existe $k < 1$ para cualquiera dos puntos $x, y \in R$ si verifica la desigualdad: $d(Ax, Ay) \leq kd(x, y)$.

Teorema 2.9 (Teorema de Bolzano)

Seja $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ una función contínua y suponga que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios entonces existirá por lo menos $\alpha \in [a; b]$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Demostración. Ver Morais ([35], 2013), página 42. ■

Teorema 2.10 (Teorema de Valor Intermedio)

Sea $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ una función contínua. Si d es un número real comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces existirá por lo menos un $\alpha \in [a; b]$ tal que $f(\alpha) = d$.

Demostración. Ver Morais ([35], 2013) página 43. ■

Teorema 2.11 (Teorema de los Multiplicadores de Lagrange)

Sean X un espacio de Banach, $J, F :\to \mathbb{R}$ funcionales de clase $C^1(R, \mathbb{R})$ y $M = \{x \in X : F(u) = 0\} = F^{-1}(\{0\})$ con $F'(u) = 0$, para todo $u \in M$. Si J es acotado inferiormente sobre M y existe $u_0 \in M$ tal que

$$J(u_0) = \inf_{u \in M} J(u), \tag{2.7}$$

entonces existe $\delta \in \mathbb{R}$ verificando

$$J'(u_0) = \delta F'(u_0). \tag{2.8}$$

Demostración. Ver el libro de Kavian Otered ([25], 1993, prop 14.3, página 55). ■

Lema 2.1 [3] Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional verificando que:

(i) $\frac{\partial I(u)}{\partial(\cdot)} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ existe para todo $u \in X$.

(ii) $\frac{\partial I(u)}{\partial(\cdot)} \in X'$ para todo $u \in X$.

(iii) Si $u_n \longrightarrow u$, entonces $\frac{\partial I(u_n)}{\partial(\cdot)} \longrightarrow \frac{\partial I(u)}{\partial(\cdot)}$ en X'.

Entonces $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ con $I'(u)v = \frac{\partial I}{\partial v}$; $\forall u, v \in X$.

Ver texto de Claudianor Alves y Romildo de Lima [3], página 42.

Teorema 2.12 (Teorema del punto fijo de Banach)

[6] Sea X un espacio de Banach y sea $T : X \to X$ una contracción, esto es, existe $k \in (0,1)$ tal que

$$\|T(u) - T(v)\| \leq k\|u - v\| \ \ \forall u,\ v \in X.$$

Entonces existe $u_0 \in X$(único) tal que $T(u_0) = u_0$.

Lema 2.2 [54] Si $u \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$ entonces $u^+ \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$.

Demostración. Ver artículo de Torres y Montalvo [53]. ■

Definición 2.8

[45] Una función f definida en el intervalo $[a,b]$, es llamada **absolutamente contínua** si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon, \quad \forall i = \overline{1,n}$$

para toda colección finita de intervalos disjuntos dos a dos (a_i, b_i) en $[a,b]$ con

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \varepsilon, \ \ \forall i = \overline{1,n}$$

2.1.1 Espacio de funciones

Es necesario definir ciertas clases de funciones, para las cuales la integral y derivada fraccionaria están bien definidas.

Definición 2.9

[26] Sea Ω un conjunto medible com $1 \leq p \leq \infty$. Denotemos por $L^p(\Omega)$ el espacio de funciones $p-$integrables en el sentido de Lebesgue, dado por,
$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega |f(t)|^p dt < \infty$, asociado con la norma $\|f\|_p = (\int_\Omega |f(t)|^p dt)^p$.

Definición 2.10

[26] Sea $L^\infty(\Omega)$ es el espacio de las funciones reales acotadas y medibles, dado por $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : \sup_{t\in\Omega} |f(t)|^p < \infty\}$, asociado con la norma $\|f\|_\infty = \sup_{t\in\Omega} |f(t)|^p$.

Definición 2.11

[45] Sean $n \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo finito sobre $\mathbb{R}$, se define y denota los siguientes espacios:

1. Espacio de funciones p-integrables en el intervalo $[a,b]$
$L^p([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R};$ f es medible sobre $[a,b]$ y $\int_a^b |f(t)|^p dt < \infty\}$,
2. Espacio de funciones contínuas en el intervalo $[a,b]$
$C([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R};$ f es contínua sobre el intervalo $[a,b]\}$
3. Espacio de funciones contínuas y diferenciables en el intervalo $[a,b]$
$C^n([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R};$ f tiene n-ésima derivada continua$\}$,
4. Espacio de funciones absolutamente contínuas en el intervalo $[a,b]$
$AC([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R};$ f es absolutamente contínua,
$(f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt, f' \in L^1[a,b])\}$.
Una forma de caracterizar estas funciones es de la siguiente manera: una función es absolutamente contínua en $[a,b]$, si y solamente si, existe una función $\varphi \in L^1[a,b]$, tal que
$$f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt, \forall x \in [a,b].$$
Por tanto , una función absolutamente contínua f es aquella cuya derivada $f'(x) = \varphi(x)$ es integrable en casi todo $[a,b]$. Esto es
$$\varphi(t) = f'(t) \text{ y } c = f(a).$$
5. Espacio de funciones que tienen $n-1$ derivadas contínuas en $[a,b]$ tales que $f^{(n-1)} \in AC[a,b]$
$AC^n([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}; f', f'' \dots f^{(n-1)} \in C[a,b]$ y $f^{(n-1)} \in AC[a,b]\}$.
En particular, $AC^1[a,b] = AC[a,b]$.

2.2 Derivada e Integral Fraccionaria de Riemann-Liouville

Existen varias formas (no necesariamente equivalentes) de definir la derivada fraccionaria de una función, una definición alternativa debido a Riemann-Liouville, Grünwald Letnikov, Hadamard, Erdélyi, Caputo y otros autores se pueden encontrar en la literatura de Kilbas ([26]) y Kenneth ([33]). En el presente trabajo se utiliza la definición de derivada fraccionaria Riemann-Liouville y de Caputo.

Definición 2.12

([61]) Sean $u : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real y $\alpha \in \mathbb{R}^+$. La integral fraccionaria de Riemann-Liouville por izquierda de orden α de la función u, es denotada por ${}_aI_t^\alpha$ y definida por

$${}_aI_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} u(s)ds. \tag{2.9}$$

La integral fraccionaria de Riemann-Liouville por derecha se define en forma análoga.

$$ {}_tI_b^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} u(s)ds \ \ \text{(por derecha)} \tag{2.10}$$

Definición 2.13

([61]) Sean $u : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $\lceil \alpha \rceil = n$ el menor entero mayor que α. La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville por izquierda de orden α de la función u, es denotada por ${}_aD_t^\alpha$ y definida por

$$ {}_aD_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} u(s)ds \tag{2.11}$$

donde ${}_aI_t^{(n-\alpha)} \in C^n[a,b]$.
La expresión (2.11), también puede ser escrita de la siguiente forma

$$ {}_aD_t^\alpha u(t) = \frac{d^n}{dt^n} \ [{}_aI_t^{(n-\alpha)} u(s)].$$

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville por derecha se define como sigue

$$ {}_tD_b^\alpha u(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \ [{}_tI_b^{(n-\alpha)} u(s)].$$

Observación: Cuando $\alpha = 1$, se puede obtener de las definiciones 2.12 y 2.13 que

$$ {}_aD_t^1 u(t) = u'(t), \quad {}_tD_b^1 u(t) = -u'(t), \tag{2.12}$$

donde u' es la derivada usual de primer orden de la función u.

Teorema 2.13 (Propiedades de la Integral y Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville)

[58] Sea $\alpha \in \langle 0;1 \rangle$ entonces:

1. Los operadores ${}_aI_x^\alpha$, ${}_xI_b^\alpha : L^p[a,b] \to L^p[a,b]$ son lineales y contínuos para todo $p \in [1,\infty]$.
2. Sea $u \in L^1[a,b]$ entonces para todo $\alpha, \beta > 0$, se tiene que

$$ {}_aI_t^\alpha ({}_aI_t^\beta u(t)) = {}_aI_t^{\alpha+\beta} u(t) \ \ y$$
$$ {}_tI_b^\alpha ({}_tI_b^\beta u(t)) = {}_tI_b^{\alpha+\beta} u(t), \quad c.t.p \quad t \in [a,b]$$

3. Primer teorema fundamental del cálculo: sea $u \in L^1[a,b]$ entonces

$$
\begin{aligned}
&{}_aD_t^\alpha({}_aI_t^\alpha u(t)) = u(t), \quad y\\
&{}_tD_b^\alpha({}_tI_b^\alpha u(t)) = u(t), \quad c.t.p. \quad t \in [a,b].
\end{aligned}
$$

4. Segundo teorema fundamental del cálculo: para $n-1 < \alpha < n$, si las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville ${}_aD_t^\alpha u(t)$ y ${}_tD_b^\alpha u(t)$, de la función u son integrables sobre $[a,b]$, entonces

$$
\begin{aligned}
{}_aI_t^\alpha({}_aD_t^\alpha u(t)) &= u(t) - \sum_{k=1}^{n} [{}_aI_t^{k-\alpha} u(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)},\\
{}_tI_b^\alpha({}_tD_b^\alpha u(t)) &= u(t) - \sum_{k=1}^{n} [{}_tI_b^{k-\alpha} u(t)]_{t=b} \frac{(-1)^n(b-t)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)},
\end{aligned}
$$

para $t \in [a,b]$

5. Integración por partes para integrales fraccionarias.

$$
\int_a^b [{}_aI_t^\alpha u(t)]v(t)dt = \int_a^b u(t)\, {}_tI_b^\alpha v(t)dt, \quad \alpha > 0,
$$

siempre que $u \in L^p[a,b],\ v \in L^{p'}[a,b]$ y

$$
p \geq 1,\ p' \geq 1 \text{ y } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} < 1 + \alpha \text{ ó } p \neq 1,\ p' \neq 1 \text{ y } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 + \alpha.
$$

$$
\int_a^b [{}_aD_t^\alpha u(t)]v(t)dt = \int_a^b u(t)\, {}_tD_b^\alpha v(t)dt, \quad 0 < \alpha \leq 1,
$$

siempre que las condiciones

$$
\begin{aligned}
&u(a) = u(b) = 0, \quad u' \in L^\infty[a,b], \quad v \in L^1[a,b] \text{ ó}\\
&u(a) = u(b) = 0, \quad v' \in L^\infty[a,b], \quad u \in L^1[a,b],
\end{aligned}
$$

se cumplan.

6. Sea $0 < \frac{1}{p} < \alpha \leq 1$ y $u(x) \in L^P[a,b]$, entonces ${}_0I_t^\alpha u(t)$ es Holder contínua sobre $[0,T]$ con exponente $\alpha - \frac{1}{p}$ y $\lim\limits_{t \to 0^+} {}_0I_t^\alpha u(t) = 0$. Consecuentemente, ${}_0I_t^\alpha u(t)$ puede ser extendido contínuamente por 0 en $x = 0$.

Demostración. Para la demostración puede ver el trabajo de Torres y Nyamoradi [58]. ■

2.3 Derivada Fraccionaria de Caputo

La definición de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville tuvo un papel muy importante en el desarrollo de la teoría del cálculo fraccionario y de sus aplicaciones puramente matemáticas (solución de ecuaciones diferenciales, definición de nuevas clases de funciones, suma de series, etc.). Sin embargo, para los problemas que surgieron en aplicaciones modernas y en los que se disponía de condiciones iniciales físicas concretas expresadas en términos de derivadas clásicas, es adecuado usar otra definición de derivada fraccionaria, también introducida por Liouville, pero utilizada por primera vez, en este mismo contexto, por Caputo, en 1967, cuando publicó su trabajo *Linear Models of Dissipations Whose Q is Almost Frequensy Independet II*. Esta definición de derivada fraccionariaes la que se conoce como derivada fraccionaria de Caputo ([19, 40]).

Definición 2.14

([61]) Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $\lceil \alpha \rceil = n$ el menor entero mayor que α. La derivada fraccionaria de Caputo por izquierda y derecha de la función $u : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se define mediante la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y se denotan por ${}_a^C D_t^\alpha u(t)$ y ${}_t^C D_b^\alpha u(t)$, respectivamente,

$$ {}_a^C D_t^\alpha u(t) = {}_a D_t^\alpha \left[u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^k(a)}{k!}(t-a)^k \right] \quad \text{(por izquierda)} $$

y

$$ {}_t^C D_b^\alpha u(t) = {}_t D_b^\alpha \left[u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^k(b)}{k!}(b-t)^k \right] \quad \text{(por derecha)}, $$

para $a \leq t \leq b$.

N En particular, cuando $0 < \alpha < 1$ de la definición 2.14, se tiene que

$$ \begin{aligned} {}_a^C D_t^\alpha u(t) &= {}_a D_t^\alpha (u(t) - u(a)) \\ {}_t^C D_b^\alpha u(t) &= {}_t D_b^\alpha (u(t) - u(a)) \end{aligned} \tag{2.13} $$

Teorema 2.14

([55])Sea $n \in \mathbb{N}$ y $n-1 < \alpha < n$. Si $u : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función para la cual las derivadas fraccionarias de Caputo ${}_a^C D_t^\alpha u$, ${}_t^C D_b^\alpha u$ y la derivada fraccionaria de Riemann-Lioville ${}_a D_t^\alpha u$, ${}_t D_b^\alpha u$ de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ existen, entonces ellas se relacionan entre sí, mediante la siguiente relación:

$$ {}_a^C D_t^\alpha u(t) = {}_a D_t^\alpha u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha} \quad , \ t \in [a,b] $$

$$ {}_t^C D_b^\alpha u(t) = {}_t D_b^\alpha u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(b-t)^{k-\alpha} \quad , \ t \in [a,b] $$

En particular, cuando $0 < \alpha < 1$, se tiene las siguientes ecuaciones

$$
\begin{aligned}
{}_a^C D_t^\alpha u(t) &= {}_a D_t^\alpha u(t) - \frac{u(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} \quad , \ t \in [a,b] \\
{}_t^C D_b^\alpha u(t) &= {}_t D_b^\alpha u(t) - \frac{u(b)}{\Gamma(1-\alpha)}(b-t)^{-\alpha} \quad , \ t \in [a,b]
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Proposición 2.2

([63]) Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $\lceil \alpha \rceil = n$, el menor entero mayor que α, ie $(n-1 < \alpha \leq n)$. Si $u \in AC^n([a,b],\mathbb{R})$, entonces la derivada fraccionaria de Caputo ${}_a^C D_t^\alpha u(t)$ y ${}_t^C D_b^\alpha u(t)$ existe c.t.p. sobre $[a,b]$.

(i) Si $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, ${}_a^C D_t^\alpha u(t)$ y ${}_t^C D_b^\alpha u(t)$ son representadas por

$$
\begin{aligned}
{}_a^C D_t^\alpha u(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} u^{(n)}(s)ds \ \text{ y} \\
{}_t^C D_b^\alpha u(t) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} u^{(n)}(s)ds
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

respectivamente, donde $n = [\alpha]+1$. En particular cuando $0 < \alpha < 1$ y $u \in AC([a,b],\mathbb{R})$,

$$
\begin{aligned}
{}_a^C D_t^\alpha u(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} u'(s)ds \ \text{ y} \\
{}_t^C D_b^\alpha u(t) &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^b (s-t)^{-\alpha} u'(s)ds
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

(ii) Si $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, entonces ${}_a^C D_t^\alpha u(t)$ y ${}_t^C D_b^\alpha u(t)$ son representadas por

$$
{}_a^C D_t^n u(t) = u^{(n)}(t) \ \ y \ \ {}_t^C D_b^n u(t) = (-1)^n u^{(n)}(t). \tag{2.17}
$$

En particular,

$$
{}_a^C D_t^0 u(t) \ = \ {}_t^C D_b^0 u(t) = u(t)
$$

Proposición 2.3

([63]) Sea $\alpha > 0$ y $u \in L^\infty([a,b],\mathbb{R})$ ó $u \in C([a,b],\mathbb{R})$. Entonces

$$
{}_a^C D_t^\alpha ({}_a I_t^\alpha u(t)) = u(t) \text{ y } {}_t^C D_b^\alpha ({}_t I_b^\alpha u(t)) = u(t). \tag{2.18}
$$

Proposición 2.4

([63]) Sea $\alpha > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que, $\lceil \alpha \rceil = n$ el menor entero mayor que α ie $(n-1 < \alpha \leq n)$. Si $u \in AC^n([a,b],\mathbb{R})$ o $u \in C^n([a,b],\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned} {}_aI_t^{\alpha}({}_a^CD_t^{\alpha}u(t)) &= u(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{u^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \quad , \ t \in [a,b] \\ {}_tI_b^{\alpha}({}_t^CD_b^{\alpha}u(t)) &= u(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k u^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k \quad , \ t \in [a,b] \end{aligned} \tag{2.19}$$

En particular, cuando $0 < \alpha \leq 1$ y $u \in AC^n([a,b],\mathbb{R})$ o $u \in C^n([a,b],\mathbb{R})$, entonces se tiene las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} {}_aI_t^{\alpha}({}_a^CD_t^{\alpha}u(t)) &= u(t) - u(a) \\ {}_tI_b^{\alpha}({}_t^CD_b^{\alpha}u(t)) &= u(t) - u(b) \end{aligned} \tag{2.20}$$

2.4 Espacio de derivadas fraccionarias

Para establecer una estructura variacional para el problema P_1 es necesario construir espacios funcionales apropiados. Para ello, se consideran los resultados de Torres y Zhou [61, 55].

Lema 2.3 Sea $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq p < \infty$. Para cualquier $u \in L^p[0,T]$, se tiene

$$\| {}_0I_{\xi}^{\alpha}u\|_{L^p[0,t]} \leq \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|u\|_{L^p[0,t]}, \ \textit{para todo } \xi \in [0,t], \ t \in [0,T] \tag{2.21}$$

(N) Para la demostración puede ver el trabajo de Torres [55].

Definición 2.15

([54]) Sea $u \in L^1(a,b)$ y $\alpha \in \langle 0,1\rangle$. Si existe $v \in L^1_{Loc}(a,b)$ tal que

$$\int_0^{\Lambda} u(t)\ {}_tD_b^{\alpha}\varphi(t)dt = \int_0^{\Lambda} v(t)\varphi(t)dt, \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}([0,\Lambda],\mathbb{R}),$$

entonces v se llama derivada débil fraccionaria por izquierda de u, y es denotada por ${}_a\dot{D}_t^{\alpha}u = v$. En forma similar, si existe $w \in L^1_{Loc}(a,b)$ tal que

$$\int_0^{\Lambda} u(t)\ {}_aD_t^{\alpha}\varphi(t)dt = \int_0^{\Lambda} w(t)\varphi(t)dt, \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}([0,\Lambda],\mathbb{R}),$$

entonces w se llama derivada débil fraccionaria por derecha de u y la denotamos por ${}_t\dot{D}_b^{\alpha}u = w$.

Observación: Cuando $\alpha = 1$, se puede escribir de la ecuación (2.12) lo siguiente:

$$ {}_0\dot{D}_t^1 u(t) = \dot{u}(t), \quad {}_t\dot{D}_\Lambda^1 u(t) = -\dot{u}(t), \tag{2.22}$$

donde $\dot{u}$ es la derivada débil usual de primer orden de la función u.

Definición 2.16

([21]) Para $0 < \alpha \leq 1,\ 1 \leq p < \infty$, el espacio ${}_LE^{\alpha,p}$ es definido por:

$${}_LE^{\alpha,p} = \{u \in L^p([0,\Lambda],\mathbb{R}) |\ {}_0\dot{D}_t^{\alpha}u \in L^p([0,\Lambda],\mathbb{R})\}$$

con la norma

$$\|u\|_{\ {}_LE^{\alpha,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|\ {}_0\dot{D}_t^{\alpha}u\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}},$$

donde $\|u\|_{L^p} = \left(\int_0^\Lambda |u(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$ es la norma de $L^p([0,\Lambda],\mathbb{R})$.

Definición 2.17

([21]) Para $0 < \alpha \leq 1,\ 1 \leq p < \infty$, el espacio ${}_RE^{\alpha,p}$ es definido por:

$${}_RE^{\alpha,p} = \{u \in L^p([0,\Lambda],\mathbb{R}) |\ {}_t\dot{D}_\Lambda^{\alpha}u \in L^p([0,\Lambda],\mathbb{R})\}$$

con la norma

$$\|u\|_{\ {}_RE^{\alpha,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|\ {}_t\dot{D}_\Lambda^{\alpha}u\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposición 2.5

([21]) Cuando $\alpha = 1$, se sigue de la ecuación (2.22) que los espacios ${}_LE^{\alpha,p}$ y ${}_RE^{\alpha,p}$ son reducidos al espacio de Sobolev $W^{1,p}([0,\Lambda],\mathbb{R})$

Lema 2.4 Sea, $0 < \alpha \leq 1$, los espacios fraccionarios $({}_LE^{\alpha,p}, \|u\|_{\ {}_LE^{\alpha,p}})$ y $({}_RE^{\alpha,p}, \|u\|_{\ {}_RE^{\alpha,p}})$, son espacios de Banach para $1 \leq p < \infty$. Además, son espacios reflexivos para $1 < p < \infty$ y espacios separables para $1 \leq p < \infty$.

N Para la demostración puede ver el trabajo de Idczak [21] y Zhou [61].

2.5 Espacio Sobolev Fraccionario $E_0^{\alpha,p}$

Definición 2.18

([21]) Para $0 < \alpha \leq 1, \quad 1 \leq p < \infty$, el espacio de Sobolev fraccionario denotado por $E_0^{\alpha,p}$ es definido por la clausura de $C_0^{\infty}([0,\Lambda],\mathbb{R})$ con respecto a la norma de $E^{\alpha,p}[a,b]$.

$$E_0^{\alpha,p}[a,b] = \overline{C_0^{\infty}[0,\Lambda]}^{\|.\|_{\alpha,p}}$$

Del Lema 2.4

Teorema 2.15

El espacio $E_0^{\alpha,p}[a,b]$ es un espacio de Banach separable y es reflexivo para $1 < p < \infty$.

N Para la demostración se puede ver el libro de Zhou [61].

Además, cuando $\alpha = 1$, el espacio $E_0^{\alpha,p}$ se reduce al espacio de Sobolev $W_0^{1,p}([0,\Lambda],\mathbb{R})$ esto por la proposicion 2.5.

Corolario 2.2 (Desigualdad fraccionaria de Poincaré-Friedrichs) Sea $u \in E_0^{\alpha,p}$, se tiene que

$$\|u\|_{L^p} \leq \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \| {}_0\dot{D}_t^{\alpha} u\|_{L^p} \tag{2.23}$$

N Para la demostración puede ver el trabajo de Jin ([23])

De acuerdo al corolario 2.2, se sabe que la norma $\|.\|_{E_0^{\alpha,p}}$ del espacio $E_0^{\alpha,p}$ es equivalente a la norma $\| {}_0\dot{D}_t^{\alpha} .\|_{L^p}$. Por tanto se puede considerar al espacio $E_0^{\alpha,p}$ con la norma $\| {}_0\dot{D}_t^{\alpha} .\|_{L^p}$.

Teorema 2.16

Sea $\alpha > \frac{1}{p}$ y $u \in E_0^{\alpha,p}$, entonces existe una función $\tilde{u} \in C([0,\Lambda],\mathbb{R})$ tal que $u = \tilde{u},\ c.t.p.\ en\ (0,\Lambda)$.

N Para la demostración puede ver el trabajo de Jin ([23])

Para $u \in E_0^{\alpha,p}$, se tiene del teorema 2.16 que

$$u \in {}_0I_t^{\alpha}(L^p([0,\Lambda],\mathbb{R})) = \{u | u = {}_0I_t^{\alpha} v,\ v \in L^p([0,\Lambda],\mathbb{R})\}. \tag{2.24}$$

Más precisamente, $\tilde{u} \in {}_0I_t^{\alpha}(L^p([0,\Lambda],\mathbb{R}))$ y $\tilde{u}$ es uniformemente contínua en $[0,\Lambda]$. Por tanto, no se distingue u y $\tilde{u}$, es decir, $E_0^{\alpha,p} \subset C([0,\Lambda],\mathbb{R})$ y ${}_0\dot{D}_t^{\alpha} u = {}_0D_t^{\alpha} u$

Teorema 2.17

Sea $\alpha > \frac{1}{p}$, entonces la inclusión de $E_0^{\alpha,p}$ en $C([0,\Lambda],\mathbb{R})$ es compacta.

N Para la demostración puede ver el trabajo de Jin ([23]).

Teorema 2.18

Sea $u \in E_0^{\alpha,p}$ con $\alpha > \frac{1}{p}$, entonces $u(0) = u(\Lambda) = 0$.

N Para la demostración puede ver el artículo de Jin ([23]).

Definición 2.19

[58] Sea $\frac{1}{p} < \alpha \leq 1$ y $1 < p < \infty$. El espacio de derivadas fraccionarias $E_0^{\alpha,p}$ es definido por

$$E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda] = \{u \in L^p[0,\Lambda] :\ {}_0D_t^{\alpha} u \in L^p[0,\Lambda], u(0) = u(\Lambda) = 0\}$$

Donde $||u||_{\alpha,p}$ es definida por

$$||u||_{\alpha,p}^p = \int_0^{\Lambda} |u(t)|^p dt \ + \ \int_0^{\Lambda} |\,{}_0D_t^{\alpha} u(t)|^p dt,\ \ \forall u \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda] \tag{2.25}$$

Proposición 2.6

Para cualquier $u \in E_0^{\alpha,p}$, observando el hecho de que, $u(0) = u(\Lambda)$, se tiene, ${}_a^cD_t^{\alpha} u(t) = {}_aD_t^{\alpha} u(t), t \in [0,T]$, según teorema 2.14.

N Para la demostración puede ver el libro de Zhou [61]

2.5.1 Propiedades del espacio fraccionario $E_0^{\alpha,p}$

Se presenta las propiedades del espacio fraccionario $E_0^{\alpha,p}$ y el operador p-laplaciano fraccionario ${}_tD_T^{\alpha}(|{}_0D_t^{\alpha} u|^{p-2}\,{}_0D_t^{\alpha} u)$ Para la demostración de este lema, puede revisar la página 180 del libro de

Zhou [61].

Proposición 2.7 (Desigualdad de Poincare-Friederich)
Sea $0 < \alpha \leq 1$ y $1 \leq p < \infty$. Para todo $u \in E_0^{\alpha,p}$, se tiene

$$\|u\|_{L^p} \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|{}_0D_t^\alpha u\|_{L^p}. \tag{2.26}$$

Si $\alpha > \frac{1}{p}$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

$$\|u\|_\infty \leq \frac{T^{\alpha-1/p}}{\Gamma(\alpha)((\alpha-1)q+1)^{1/q}} \|{}_0D_t^\alpha u\|_{L^p} \tag{2.27}$$

Demostración. Ver el tabajo de Jiao y Torres [22, 55]. ■

De acuerdo a la proposición 2.7 se puede considerar $E_0^{\alpha,p}$ con respecto a la norma

$$\|u\|_{E_0^{\alpha,p}} = \|{}_0D_t^\alpha u(t)\|_{L^p} = \left(\int_0^t |{}_0D_t^\alpha u(t)|^p dt\right)^{1/p}. \tag{2.28}$$

Para mayor detalle puede ver el trabajo de Torres y Nyamoradi [58]

Proposición 2.8
Por otra parte (2.27) se tiene

$$\|u\|_\infty \leq \frac{T^{\alpha-1/\alpha}}{\Gamma(\alpha)((\alpha-1)q+1)^{1/q}} \|{}_0D_t^\alpha u(t)\|_{L^p} = \frac{T^{\alpha-1/\alpha}}{\Gamma(\alpha)((\alpha-1)q+1)^{1/q}} \|u(t)\|_{\alpha,p} \tag{2.29}$$

es decir $E_0^{\alpha,p}$ está inyectado contínuamente en $C[0,T]$ para $\alpha > \frac{1}{p}$.

Demostración. Ver el trabajo de de Torres y Nyamoradi [58] ■

Lema 2.5 Sea $1/p < \alpha \leq 1$, si $u \in E_0^{\alpha,p}$, entonces $u \in L^r[0,T]$ para $r \in [p, +\infty]$.

Demostración. Ver el trabajo de Torres [55] ■

Proposición 2.9

Sea $0 < \alpha \leq 1$ y $1 \leq p < \infty$. Asuma que $\alpha > \frac{1}{p}$ y $u_k \rightharpoonup u$ en $E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])$. Entonces $u_k \to u$ en $C[0,T]$, ie, $\|u_k - u\|_\infty \to 0$, $k \to \infty$.

Demostración. Ver el trabajo de Jiao [22]. ■

Teorema 2.19

[58] Sea $\alpha \in \langle \frac{1}{p}, 1\rangle$, entonces la inyección continua $E_0^{\alpha,p} \hookrightarrow L^p[0,T]$ es compacta.

Demostración. Ver el trabajo de Torres y Nyamoradi [58]. ■

2.6 Operador p-Laplaciano fraccionario

Ahora, vea las propiedades del operador p-Laplaciano fraccionario ${}_tD_T^\alpha(|{}_0D_t^\alpha u|^{p-2}\,{}_0D_t^\alpha u)$. Considere el siguiente funcional

$$\mathscr{I} = \frac{1}{p}\int_0^T |{}_0D_t^\alpha u|^p dt, \quad u \in E_0^{\alpha,p}. \tag{2.30}$$

Se sabe que $\mathscr{I} \in C^1(E_0^{\alpha,p}, \mathbb{R})$, (puede ver [55]) y el operador p-laplaciano fraccionario ${}_tD_T^\alpha(|{}_0D_t^\alpha u|^{p-2}\,{}_0D_t^\alpha u)$, es la derivada de $\mathscr{I}$ en el sentido débil, es decir

$$\langle \mathscr{I}'(u), v\rangle = \int_0^T |{}_0D_t^\alpha u(t)|^{p-2}\,{}_0D_t^\alpha u(t)\,{}_0D_t^\alpha v(t)dt, \quad \forall u,v \in E_0^{\alpha,p}. \tag{2.31}$$

Teorema 2.20

1. $\mathscr{I}' : E_0^{\alpha,p} \to (E_0^{\alpha,p})^*$ es un operador acotado y estrictamente monótono.
2. $\mathscr{I}'$ es un mapeo de tipo (S_+), es decir, si $u_n \rightharpoonup u$ en $E_0^{\alpha,p}$ y $\lim_{n\to+\infty} \langle \mathscr{I}'(u_n), u_n\rangle \leq 0$, entonces $u_n \to u$ en $E_0^{\alpha,p}$.
3. $\mathscr{I}' : E_0^{\alpha,p} \to (E_0^{\alpha,p})^*$ es un homeomorfismo.

Demostración. Ver el trabajo de Torres y Nyamoradi [58] ■

Problema no lineal con p-laplaciano fraccionario
Formulación variacional
Funcional de energía
Variedad de Nehari y Función de Fibrado
Función de fibrado
Comportamiento de la función m_u
Análisis de la función de fibrado
Propiedades de la variedad de Nehari
Existencia de solución débil del problema estacionario

3 — Problema Estacionario Fraccionario

En este capítulo, se formula el problema parabólico no lineal con derivadas fraccionarias, él se fundamenta en el modelo matemático estudiado por Meilan et al. ([44]) y el problema de contorno estudiado por Sánchez y Torres ([49]).

3.1 Problema no lineal con p-laplaciano fraccionario

Se considera el siguiente problema:

$$P_0 \left\{ \begin{array}{c} {}_xD_\Lambda^\alpha(|\,{}_0D_x^\alpha u(x)|^{p-2}\,{}_0D_x^\alpha u(x)) = \lambda|u(x)|^{p-2}u(x) + b(x)|u(x)|^{q-1}u(x), \quad x \in [0,\Lambda] \\ u(0) = u(\Lambda) = 0 \end{array} \right.$$

Donde el orden de la derivada fraccionaria se establece en $\frac{1}{p} < \alpha < 1$, con $2 < p < \infty$. Se considera que $b : [0,\Lambda] \to \mathbb{R}$ es una función contínua. Además λ un parámetro real positivo y q es un número real tal que $1 < q < p-1$.

A partir de esta sección se considera $b(x) = b,\ u(x) = u,\ E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda] = E_0^{\alpha,p}$, por simplicidad de escritura. A menos que sea necesario la especificación.

3.1.1 Formulación Variacional

Dado el siguiente problema de contorno semilineal:

$$\begin{array}{c} {}_xD_\Lambda^\alpha(|{}_0D_x^\alpha u(x)|^{p-2}\,{}_0D_x^\alpha u(x)) = \lambda|u(x)|^{p-2}u(x) + b(x)|u(x)|^{q-1}u(x), \forall x \in [0,\Lambda] \\ u(0) = u(\Lambda) = 0, \end{array} \tag{3.1}$$

Considere: $1 < q < p-1,\ 2 < p < \infty,$ y $\frac{1}{p} < \alpha < 1$
Sea $v \in C_0^{\infty}[0,\Lambda]$, además se escribe $u(x) = u,\ b(x) = b$, se obtiene:

$$\int_{[0,\Lambda]} {}_xD_{\Lambda}^{\alpha}(|_0D_x^{\alpha}u|^{p-2}\,{}_0D_x^{\alpha}u)\varphi dx = \int_{[0,\Lambda]} \lambda|u|^{p-2}u\varphi dx + \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q-1}u\varphi,\ \ \forall\varphi \in C_0^{\infty}[0,\Lambda]$$
$$\int_{[0,\Lambda]} |_0D_x^{\alpha}u|^{p-2}\,{}_0D_x^{\alpha}u\,{}_0D_x^{\alpha}\varphi dx = \int_{[0,\Lambda]} \lambda|u|^{p-2}u\varphi dx + \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q-1}u\varphi dx,\ \ \forall\varphi \in C_0^{\infty}[0,\Lambda]$$
$$\int_{[0,\Lambda]} |_0D_x^{\alpha}u|^{p-2}\,{}_0D_x^{\alpha}u\,{}_0D_x^{\alpha}vdx = \int_{[0,\Lambda]} \lambda|u|^{p-2}uvdx + \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q-1}uvdx,\ \ \forall v \in \overline{C_0^{\infty}[0,\Lambda]}$$
$$\int_{[0,\Lambda]} |_0D_x^{\alpha}u|^{p-2}\,{}_0D_x^{\alpha}u\,{}_0D_x^{\alpha}vdx = \int_{[0,\Lambda]} \lambda|u|^{p-2}u\ vdx + \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q-1}uvdx,\ \ \forall v \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda].$$

Luego

$$J_{\lambda}'(u)v = \int_{[0,\Lambda]} |_0D_x^{\alpha}u|^{p-2}\,{}_0D_x^{\alpha}u\,{}_0D_x^{\alpha}vdx - \int_{[0,\Lambda]} \lambda|u|^{p-2}uvdx - \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q-1}uvdx;\ \ \forall v \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$$

Si esta función es la derivada de un funcional para algún $u \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$ entonces se tiene una formulación variacional, con

$J_{\lambda} : E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda] \to \mathbb{R}$

$$u\ \to J_{\lambda}(u) = \frac{1}{p}\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^{\alpha}u|^p dx - \frac{\lambda}{p}\int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx - \frac{1}{q+1}\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1}dx;\ \ \forall u \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$$

Donde: $\frac{1}{p} < \alpha < 1,\ \ 1 < q < p-1,\ \ 2 < p < \infty.$
Se debe probar que J_{λ} es de clase $C^1(E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda],\mathbb{R})$.

Teorema 3.1

Sea $J_{\lambda} : E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda] \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J_{\lambda}(u) = \frac{1}{p}\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^{\alpha}u|^p dx - \frac{\lambda}{p}\int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx - \frac{1}{q+1}\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1}dx. \tag{3.2}$$

Entonces, $J_{\lambda} \in C^1(E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda],\mathbb{R})$ con

$$J_{\lambda}'(u)v = \int_{[0,\Lambda]} |_0D_x^{\alpha}u|^{p-2}\,{}_0D_x^{\alpha}u\,{}_0D_x^{\alpha}vdx - \int_{[0,\Lambda]} \lambda|u|^{p-2}uvdx - \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q-1}uvdx;\ \ \forall v \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda] \tag{3.3}$$

Demostración. Sean $J_1, J_2, J_3 : E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda] \longrightarrow \mathbb{R}$, de la siguiente manera:

$$J_1(u) = \frac{1}{p}\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^{\alpha}u|^p dx;$$
$$J_2(u) = \frac{\lambda}{p}\int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx;$$
$$J_3(u) = \frac{1}{q+1}\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1}dx;\ \text{para todo } u \in E_0^{\alpha,p}.$$

Usando el Lema 2.1, se debe probar que cumplan con las condiciones $(i),(ii),(iii)$. En efecto

(i) Se procede a demostar que $\frac{\partial J_1(u)}{\partial v}$ existe

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_1(u)}{\partial v} &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(J_1(u+tv)-J_1(u))\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{1}{p}\int_{[0,\Lambda]}|\,{}_0D_x^\alpha(u+tv)|^p dx-\frac{1}{p}\int_{[0,\Lambda]}|\,{}_0D_x^\alpha u|^p dx\right)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{1}{p}\int_{[0,\Lambda]}(|\,{}_0D_x^\alpha(u+tv)|^p-|\,{}_0D_x^\alpha u|^p)dx\right)\end{aligned}$$

Considere la siguiente función

$$\begin{aligned}&f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \text{dada por}\\ &t\to f(t)=\frac{1}{p}|\,{}_0D_x^\alpha u+t\,{}_0D_x^\alpha v|^p=\frac{1}{p}|\,{}_0D_x^\alpha u(x)+t\,{}_0D_x^\alpha v(x)|^p,\end{aligned}\tag{3.4}$$

donde $t\in\mathbb{R}$, con $u,v\in E_0^{\alpha,p}$. La función es f es contínua en $\mathbb{R}$, por ser la suma de dos funciones contínuas. Si suponemos ${}_0D_x^\alpha u\neq 0$. Aplicando la regla de la cadena, se tiene que para todo $t\in\mathbb{R}$, tal que $(\,{}_0D_x^\alpha u+t\,{}_0D_x^\alpha v)\neq 0$, se obtiene $f'(t)$ como en la parte (b). Así,

(a) $f(0)=\frac{1}{p}|\,{}_0D_x^\alpha u|^p$,

(b) $f'(t)=\frac{1}{p}p|\,{}_0D_x^\alpha u+t\,{}_0D_x^\alpha v|^{p-1}\frac{(\,{}_0D_x^\alpha u+t\,{}_0D_x^\alpha v)}{|\,{}_0D_x^\alpha u+t\,{}_0D_x^\alpha v|}\,{}_0D_x^\alpha v=|\,{}_0D_x^\alpha u+t\,{}_0D_x^\alpha v|^{p-2}(\,{}_0D_x^\alpha u+t\,{}_0D_x^\alpha v)\,{}_0D_x^\alpha v.$

Si consideramos la función contínua $g(t)=|\,{}_0D_x^\alpha u+t\,{}_0D_x^\alpha v|$, como $g(0)=|\,{}_0D_x^\alpha u|>0$, existe una vecindad $[-t,t]$ con centro en el origen, tal que $g(t)=|\,{}_0D_x^\alpha u+t\,{}_0D_x^\alpha v|>0$, para todo elemento en ese intervalo. Por lo tanto, se tiene que f es de clase C^1 en $\langle 0,t\rangle$ (respectivamente en $\langle -t,0\rangle$). Entonces por el teorema de Valor Medio, existe $\delta\in\langle 0,t\rangle$ (respectivamente, $\delta\in\langle -t,0\rangle$) tal que,

$$\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'(\delta)=|\,{}_0D_x^\alpha u+\delta\,{}_0D_x^\alpha v|^{p-2}(\,{}_0D_x^\alpha u+\delta\,{}_0D_x^\alpha v)\,{}_0D_x^\alpha v\tag{3.5}$$

(respectivamente, $\frac{f(0)-f(-t)}{t}=f'(\delta)$). Luego se tiene que

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'(0)$$

(respectivamente, $\lim\limits_{t\to 0^-}\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'(0)$). En consecuencias se sigue que

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{|\,{}_0D_x^\alpha u+t\,{}_0D_x^\alpha v|^p-|\,{}_0D_x^\alpha u|^p}{t}\right)=|\,{}_0D_x^\alpha u|^{p-2}\,{}_0D_x^\alpha u\,{}_0D_x^\alpha v.\tag{3.6}$$

Ahora analizando por separado ${}_0D_x^\alpha u=0$. En este caso, la función f se simplifica a $f(t)=|t\,{}_0D_x^\alpha v|^p$. Así se tiene que

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{t^p|\,{}_0D_x^\alpha v|^p}{t}\right)=0$$

ya que $2 < p < \infty$. Con esto se prueba que, independiente del valor de $u(x)$, lo obtenido en (3.6) es válido. Además, de (3.5), tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{|\,{}_0D_x^\alpha u + t\,{}_0D_x^\alpha v|^p - |\,{}_0D_x^\alpha u|^p}{t}\right| &= |\,{}_0D_x^\alpha u + \delta\,{}_0D_x^\alpha v|^{p-1}|\,{}_0D_x^\alpha v| \\ &\leq (|\,{}_0D_x^\alpha u| + |\delta||\,{}_0D_x^\alpha v|)^{p-1}|\,{}_0D_x^\alpha v|\end{aligned}$$

Dado que se esta considerando $|t|$ pequeño, y consecuentemente $|\delta|$ pequeño, se puede asumir que $0 < \delta < 1$. Así, se sigue que

$$\left|\frac{|\,{}_0D_x^\alpha u + t\,{}_0D_x^\alpha v|^p - |\,{}_0D_x^\alpha u|^p}{t}\right| \leq (|\,{}_0D_x^\alpha u| + |\,{}_0D_x^\alpha v|)^{p-1}|\,{}_0D_x^\alpha v|, \tag{3.7}$$

donde el lado derecho de la ecuación (3,7) no depende de t. Como $E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda] \hookrightarrow L^p[0,\Lambda]$ contínuamente, se tiene que ${}_0D_x^\alpha u,\ {}_0D_x^\alpha v \in L^p$, entonces $\left|\frac{|\,{}_0D_x^\alpha u+t\,{}_0D_x^\alpha v|^p-|\,{}_0D_x^\alpha u|^p}{t}\right| \in L^p$. Usando la desigualdad de Hölder con exponentes $\frac{p-1}{p}$ y p en $(|\,{}_0D_x^\alpha u| + |\,{}_0D_x^\alpha v|)^{p-1}|\,{}_0D_x^\alpha v|$

$$\begin{aligned}\int_{[0,\Lambda]}[(|\,{}_0D_x^\alpha u| + |\,{}_0D_x^\alpha v|)^{p-1}]^1|\,{}_0D_x^\alpha v|^1 &\leq \left(\int_{[0,\Lambda]}(|\,{}_0D_x^\alpha u| + |\,{}_0D_x^\alpha v|)^{p-1\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\qquad \left(\int_{[0,\Lambda]}|\,{}_0D_x^\alpha v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \||\,{}_0D_x^\alpha u| + |\,{}_0D_x^\alpha v|\|_{L^p}^{p-1}\|\,{}_0D_x^\alpha v\|_{L^p} \leq \infty.\end{aligned}$$

Luego $(|\,{}_0D_x^\alpha u|^{p-1} + |\,{}_0D_x^\alpha v|)^{p-1}|\,{}_0D_x^\alpha v| \in L^1[0,\Lambda]$ y por el teorema de la Convergencia dominada de Lebesgue 2.5 se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\int_{[0,\Lambda]}\frac{1}{p}\frac{|\,{}_0D_x^\alpha u + t\,{}_0D_x^\alpha v|^p - |\,{}_0D_x^\alpha u|^p}{t}dx &= \int_{[0,\Lambda]}\lim_{t\to 0}\frac{1}{p}\frac{|\,{}_0D_x^\alpha u + t\,{}_0D_x^\alpha v|^p - |\,{}_0D_x^\alpha u|^p}{t}dx \\ &= \int_{[0,\Lambda]}|\,{}_0D_x^\alpha u|^{p-2}\,{}_0D_x^\alpha u\,{}_0D_x^\alpha v dx.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial J_1(u)}{\partial v} = \lim_{t\to 0}\int_{[0,\Lambda]}\frac{1}{p}\frac{|\,{}_0D_x^\alpha u + t\,{}_0D_x^\alpha v|^p - |\,{}_0D_x^\alpha u|^p}{t}dx = \int_{[0,\Lambda]}|\,{}_0D_x^\alpha u|^{p-2}\,{}_0D_x^\alpha u\,{}_0D_x^\alpha v dx$$

$$\frac{\partial J_1(u)}{\partial v} = \int_{[0,\Lambda]}|\,{}_0D_x^\alpha u|^{p-2}\,{}_0D_x^\alpha u\,{}_0D_x^\alpha v dx,\ \ \textit{existe}.$$

(ii) Se procede a demostrar que $\frac{\partial J_1(u)}{\partial v}$ es lineal y contínuo. Sea $k \in \mathbb{R}$, y $v_1, v_2 \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_1(u)}{\partial(kv_1+v_2)} &= \int_{[0,\Lambda]}|\,{}_0D_x^\alpha u|^{p-2}\,{}_0D_x^\alpha u\,{}_0D_x^\alpha(kv_1+v_2)dx \\ &= k\int_{[0,\Lambda]}|\,{}_0D_x^\alpha u|^{p-2}\,{}_0D_x^\alpha u\,{}_0D_x^\alpha v_1 dx + \int_{[0,\Lambda]}|\,{}_0D_x^\alpha u|^{p-2}\,{}_0D_x^\alpha u\,{}_0D_x^\alpha v_2 dx \\ &= k\frac{\partial J_1(u)}{\partial v_1} + \frac{\partial J_1(u)}{\partial v_2},\ \ \forall u.v \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda].\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial J_1(u)}{\partial (v_1)}\right| &= \left|\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha u|^{p-2}\,{}_0D_x^\alpha u\,{}_0D_x^\alpha v dx\right| = \left|\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha u|^{p-1}\,{}_0D_x^\alpha v dx\right| \\ &\leq \int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha u|^{p-1}\,|{}_0D_x^\alpha v| dx \\ &\leq \left(\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha u|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\,{}_0D_x^\alpha u\|_{L^p}^{p-1} \|\,{}_0D_x^\alpha v\|_{L^p} = \|u\|^{p-1}_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]} \|v\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\left\|\frac{\partial J_1(u)}{\partial (.)}\right\| = \sup_{\|v\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}\leq 1} \left|\frac{\partial J_1(u)}{\partial (v)}\right| \leq \|u\|^{p-1}_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}, \quad \forall u \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$$

(iii) Si $u_n \to u$ en $E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$ entonces $\frac{\partial J_1(u_n)}{\partial v} \to \frac{\partial J_1(u)}{\partial v}$ en existe $(E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda])^*$.
Para esta parte usaremos la siguiente desigualdad:

Proposición 3.1

[55]

1. Si $p \in [2,\infty\rangle$, entonces se cumple que

$$||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y| \leq \beta|z-y|(|z|+|y|)^{p-2}, \quad \forall\, y,z \in \mathbb{R} \tag{3.8}$$

con β independiente de y y z.

2. Si $p \in \langle 1,2]$, entonces se cumple que

$$||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y| \leq \beta|z-y|^{p-1}, \quad \forall\, y,z \in \mathbb{R} \tag{3.9}$$

con β independiente de y y z.

Sea $(u_n) \subset E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$ y $u \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$ con $u_n \to u$ *en* $E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])$.

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial J_1(u_n)}{\partial v} - \frac{\partial J_1(u)}{\partial v}\right| &= \left|\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha u_n|^{p-2}\,{}_0D_x^\alpha u_n\,{}_0D_x^\alpha v dx - \int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha u|^{p-2}\,{}_0D_x^\alpha u\,{}_0D_x^\alpha v dx\right| \\
&= \left|\int_{[0,\Lambda]} \left(|\,{}_0D_x^\alpha u_n|^{p-2}\,{}_0D_x^\alpha u_n - |\,{}_0D_x^\alpha u|^{p-2}\,{}_0D_x^\alpha u\right)\,{}_0D_x^\alpha v dx\right| \\
&\leq c\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha u_n - \,{}_0D_x^\alpha u|\,(|\,{}_0D_x^\alpha u_n| + |\,{}_0D_x^\alpha u|)^{p-2}\,{}_0D_x^\alpha v dx \\
&\leq c\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha (u_n - u)|\,(|\,{}_0D_x^\alpha u_n| + |\,{}_0D_x^\alpha u|)^{p-2}\,{}_0D_x^\alpha v dx \\
&\leq c\left(\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha (u_n-u)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha u_n| + |\,{}_0D_x^\alpha u|^{p-2})^{p'}(\,{}_0D_x^\alpha v)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq c\|\,{}_0D_x^\alpha (u_n-u)\|_{L^p}\left(\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha u_n| + |\,{}_0D_x^\alpha u|)^{(p-2)p'\frac{p}{(p-2)p'}}\right)^{\frac{(p-2)p'}{p}\frac{1}{p'}} \\
&\left(\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha v|^{p'r} dx\right)^{\frac{1}{rp'}} \\
&\leq c\|u_n - u\|_{E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])}\||\,{}_0D_x^\alpha u_n| + |\,{}_0D_x^\alpha u|\|_{L^p}^{p-2}\|\,{}_0D_x^\alpha v\|_{L^p}^{\frac{p-1}{r}} \\
&\leq cs\|u_n - u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}(\|\,{}_0D_x^\alpha u_n\|_{L^p} + \|\,{}_0D_x^\alpha u\|_{L^p})^{p-2}\|\,{}_0D_x^\alpha v\|_{L^p}^{\frac{p-1}{r}} \\
&\leq C_1 s\|u_n - u\|_{E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])}(\|u_n\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]} + \|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]})^{p-2}\|v\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}^{\frac{p-1}{r}}
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\sup_{\|v\|_{E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])}\leq 1}\left|\frac{\partial J_1(u_n)}{\partial v} - \frac{\partial J_1(u)}{\partial v}\right| \leq C\|u_n - u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]} \to 0,\ \textit{cuando } n\to\infty
$$

Ahora vea con $J_2(u) = \frac{\lambda}{p}\int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx$

(i) Se procede a demostrar que $\frac{\partial J_2(u)}{\partial v}$ existe

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J_2(u)}{\partial v} &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(J_2(u+tv) - J_2(u)) \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{\lambda}{p}\int_{[0,\Lambda]} |(u+tv)|^p dx - \frac{\lambda}{p}\int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx\right) \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{\lambda}{p}\int_{[0,\Lambda]} (|(u+tv)|^p - |u|^p) dx\right)
\end{aligned}
$$

Considere la siguiente función

$$
\begin{aligned}
&f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad \text{dada por} \\
&\quad t \to f(t) = \frac{1}{p}|u+tv|^p = \frac{1}{p}|u(x)+tv(x)|^p,
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

donde $t \in \mathbb{R}$, con $u, v \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$. La función es f es continua en $\mathbb{R}$, por ser la suma de dos funciones contínuas. Si suponemos $u(x) \neq 0$. Aplicando la regla de la cadena, se tiene que para todo $t \in \mathbb{R}$, tal que $(u+tv) \neq 0$, se obtiene $f'(t)$ como en la parte (b). Así,

(a) $f(0) = \frac{1}{p}|u|^p$,

(b) $f'(t) = \frac{1}{p}p|u+tv|^{p-1}\frac{(u+tv)}{|u+tv|}v = |u+tv|^{p-2}(u+tv)v$.

Si consideramos la función contínua $g(t) = |u+tv|$, como $g(0) = |u| > 0$, existe una vecindad $[-t,t]$ con centro en el origen, tal que $g(t) = |u+tv| > 0$, para todo elemento en ese intervalo. Por lo tanto, se tiene que f es de clase C^1 en $\langle 0,t\rangle$ (respectivamente en $\langle -t,0\rangle$). Entonces por el teorema de Valor Medio, existe $\delta \in \langle 0,t\rangle$ (respectivamente, $\delta \in \langle -t,0\rangle$) tal que,

$$\frac{f(t)-f(0)}{t} = f'(\delta) = |u+\delta v|^{p-2}(u+\delta v)v \tag{3.11}$$

(respectivamente, $\frac{f(0)-f(-t)}{t} = f'(\delta)$). Luego se tiene que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t} = f'(0)$$

(respectivamente, $\lim\limits_{t\to 0^-} \frac{f(t)-f(0)}{t} = f'(0)$). En consecuencias se sigue que

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{|u+tv|^p-|u|^p}{t}\right) = |u|^{p-2}uv. \tag{3.12}$$

Ahora analizando por separado $u=0$. En este caso, la función f se simplifica a $f(t) = |tv|^p$. Así se tiene que

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{t^p|v|^p}{t}\right) = 0$$

ya que, $2 < p < \infty$. Con esto se prueba que, independiente del valor de $u(x)$, lo obtenido en(3.12) es válido. Además, de (3.11), tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{|u+tv|^p-|u|^p}{t}\right| &= |u+\delta v|^{p-1}|v| \\ &\leq (|u|+|\delta||v|)^{p-1}|v|\end{aligned}$$

Como se está considerando $|t|$ pequeño, y consecuentemente $|\delta|$ pequeño, se puede asumir$0 < \delta < 1$. Así, se sigue que

$$\left|\frac{|u+tv|^p-|u|^p}{t}\right| \leq (|u|+|v|)^{p-1}|v|, \tag{3.13}$$

donde el lado derecho de la ecuación (3.13) no depende de t. Como $E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda] \hookrightarrow L^p([0,\Lambda])$ contínuamente, se tiene que $u,\ v \in L^p$, entonces $\left|\frac{|u+tv|^p-|u|^p}{t}\right| \in L^p$. Usando la desigualdad de Hölder con exponentes $\frac{p}{p-1}$ y p en $k(|u|+|v|)^{p-1}|v|$

$$\begin{aligned}\int_{[0,\Lambda]}[(|u|+|v|)^{p-1}]^1|v|^1 &\leq \left(\int_{[0,\Lambda]}|(|u|+|v|)^{p-1}|^{\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{[0,\Lambda]}|v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \||u|+|v|\|_{L^p}^{p-1}\|v\|_{L^p} \leq \infty.\end{aligned}$$

Luego $(|u|+|v|)^{p-1}|v| \in L^1[0,\Lambda]$ y por el teorema de la Convergencia dominada de Lebesgue 2.5 se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\int_{[0,\Lambda]} \frac{\lambda}{p}\frac{|u+tv|^p-|u|^p}{t}dx &= \int_{[0,\Lambda]}\lim_{t\to 0}\frac{\lambda}{p}\frac{|u+tv|^p-|u|^p}{t}dx\\
&= \lambda\int_{[0,\Lambda]}|u|^{p-2}uvdx.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial J_2(u)}{\partial v} = \lim_{t\to 0}\int_{[0,\Lambda]}\frac{\lambda}{p}\frac{|u+tv|^p-|u|^p}{t}dx = \lambda\int_{[0,\Lambda]}|u|^{p-2}uvdx$$

$$\frac{\partial J_2(u)}{\partial v} = \lambda\int_{[0,\Lambda]}|u|^{p-2}uvdx, \quad existe.$$

(ii) Se procede a demostrar que $\frac{\partial J_2(u)}{\partial v}$ es lineal y contínuo. Sea $k\in\mathbb{R}$, y $v_1, v_2 \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_2(u)}{\partial(kv_1+v_2)} &= \lambda\int_{[0,\Lambda]}|u|^{p-2}\, u(kv_1+v_2)dx\\
&= \lambda k\int_{[0,\Lambda]}|u|^{p-2}\, u\, v_1dx + \int_{[0,\Lambda]}|u|^{p-2}\, u\, v_2dx\\
&= \lambda k\frac{\partial J_2(u)}{\partial v_1} + \frac{\partial J_2(u)}{\partial v_2}, \quad \forall u.v\in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda].
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial J_2(u)}{\partial(v_1)}\right| &= \left|\lambda\int_{[0,\Lambda]}|u|^{p-2}\, u\, vdx\right| = \left|\lambda\int_{[0,\Lambda]}|u|^{p-1}\, vdx\right|\\
&\leq \lambda\int_{[0,\Lambda]}|u|^{p-1}\,|v|dx
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\Lambda]}|u|^{p-1}vdx &\leq \left(\int_{[0,\Lambda]}|u|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{[0,\Lambda]}|v|^pdx\right)^{1/p}\\
&= \|u\|_{L^p}^{p-1}\|v\|_{L^p} \leq \left(\frac{\Lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{p-1}\|u\|_{E_0^{\alpha,p}}^{p-1}\left(\frac{\Lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\|v\|_{E_0^{\alpha,p}}.\\
&= \left(\frac{\Lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^p\|u\|_{E_0^{\alpha,p}}^{p-1}\|v\|_{E_0^{\alpha,p}} = S^p\|u\|_{E_0^{\alpha,p}}^{p-1}\|v\|_{E_0^{\alpha,p}}
\end{aligned}$$

$$\left\|\frac{\partial J_2(u)}{\partial(.)}\right\| = \sup_{\|v\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}\leq 1}\left|\frac{\partial J_2(u)}{\partial(v)}\right| \leq \|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}^{p-1}, \quad \forall u\in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$$

(iii) Si $u_n \to u$ en $E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$ entonces $\frac{\partial J_2(u_n)}{\partial v} \to \frac{\partial J_2(u)}{\partial v}$ en existe $(E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda])^*$.
Sea $(u_n) \subset E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$ y $u \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$ con $u_n \to u\ \ en\ \ E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial J_2(u_n)}{\partial v} - \frac{\partial J_2(u)}{\partial v}\right| &= \left|\lambda \int_{[0,\Lambda]} |u_n|^{p-2}\, u_n\, vdx - \lambda \int_{[0,\Lambda]} |u|^{p-2}\, u\, vdx\right| \\
&= \left|\lambda \int_{[0,\Lambda]} \left(|u_n|^{p-2}\, u_n - |u|^{p-2}\, u\right) vdx\right| \\
&\leq c\lambda \int_{[0,\Lambda]} |u_n - u|\,(|u_n| + |u|)^{p-2}\ vdx \\
&\leq c\lambda \int_{[0,\Lambda]} |(u_n - u)|\,(|u_n| + |u|)^{p-2}\ vdx \\
&\leq c\lambda \left(\int_{[0,\Lambda]} |(u_n - u)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{[0,\Lambda]} (|u_n| + |u|^{p-2})^{p'} (v)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq c\lambda \|(u_n - u)\|_{L^p} \left(\int_{[0,\Lambda]} (|u_n| + |u|)^{(p-2)p'\frac{p}{(p-2)p'}}\right)^{\frac{(p-2)p'}{p}\frac{1}{p'}} \\
&\quad \left(\int_{[0,\Lambda]} |v|^{p'r} dx\right)^{\frac{1}{rp'}} \\
&\leq c\lambda \|u_n - u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]} \||u_n| + |u|\|_{L^p}^{p-2} \|v\|_{L^p}^{\frac{p-1}{r}} \\
&\leq cs\lambda \|u_n - u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]} (\|u_n\|_{L^p} + \|u\|_{L^p})^{p-2} \|v\|_{L^p}^{\frac{p-1}{r}} \\
&\leq C_1 s \|u_n - u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]} (\|u_n\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]} + \|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]})^{p-2} \|v\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}^{\frac{p-1}{r}}
\end{aligned}$$

Luego

$$\sup_{\|v\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]} \leq 1} \left|\frac{\partial J_2(u_n)}{\partial v} - \frac{\partial J_2(u)}{\partial v}\right| \leq C\|u_n - u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]} \to 0,\ cuando\ n \to \infty$$

Ahora vea con $J_3(u) = \frac{1}{q+1}\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1}dx$

(i) Se procede a demostrar que $\frac{\partial J_3(u)}{\partial v}$ existe.

$$\frac{\partial J_3(u)}{\partial v} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(J_3(u+tv) - J_3(u)) \tag{3.14}$$

Considere la siguiente función

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(s) = \frac{1}{q+1} b|u + stv|^{q+1},$$

donde $t \in \mathbb{R}$ y es tal que $0 < |t| < 1$ con $u, v \in E_0^{\alpha,p}$. Así,

(a) $f(1) = \frac{1}{q+1} b|u + stv|^{q+1}$,
(b) $f(0) = \frac{1}{q+1} b|u|^{q+1}$,
(c) $f'(s) = b|u + stv|^{q-1}(u + stv)tv$.

Como f es diferenciable en $(0,1)$, entonces por el teorema de Valor Medio, existe $\delta \in (0,1)$ tal que,

$$f(1) - f(0) = f'(\delta)(1-0)$$

luego,

$$\frac{1}{q+1} b|u+tv|^{q+1} - \frac{1}{q+1} b|u|^{q+1} = b|u+\delta tv|^{q-1}(u+\delta tv)tv. \tag{3.15}$$

Se divide la ecuación (3.15) por t (con $0 < |t| < 1$), se obtiene

$$\frac{1}{q+1} b\left(\frac{|u+tv|^{q+1} - |u|^{q+1}}{t}\right) = b|u+\delta tv|^{q-1}(u+\delta tv)tv.$$

Ahora, aplicando el límite cuando $t \to 0$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{q+1} b\left(\frac{|u+tv|^{q+1} - |u|^{q+1}}{t}\right) = b|u|^{q-1}uv.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{q+1} b\left(\frac{|u+tv|^{q+1} - |u|^{q+1}}{t}\right)\right| &= |b||u+\delta tv|^{q}|v| \\ &\leq |b|(|u| + |\delta||t||v|)^{q}|v| \\ &\leq k(|u| + |\delta||t||v|)^{q}|v| \\ &\leq k(|u| + |v|)^{q}|v|\end{aligned}$$

Como $u, v \in E_0^{\alpha,p}$, se sigue que $E_0^{\alpha,p} \hookrightarrow L^q$ es contínua para $1 < q < p-1 < p < \infty$. Usando la desigualdad de Hölder con exponentes $\frac{q+1}{q}$ y $q+1$ en $k(|u|+|v|)^q|v|$

$$\begin{aligned}\int_{[0,\Lambda]} [(|u|+|v|)^{q}]^{1}|v|^{1} &\leq \left(\int_{[0,\Lambda]} |(|u|+|v|)^{q}|^{\frac{q+1}{q}} dx\right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_{[0,\Lambda]} |v|^{q+1} dx\right)^{\frac{1}{q+1}} \\ &\leq \||u|+|v|\|_{L^{q+1}} \|v\|_{L^{q+1}} \leq \infty.\end{aligned}$$

Entonces $k(|u|+|v|)^q|v| \in L^1([0,\Lambda])$ y por el teorema de la Convergencia dominada de Lebesgue (Teorema 2.5) se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{1}{q+1} \int_{[0,\Lambda]} b\frac{|u+tv|^{q+1} - |u|^{q+1}}{t} dx &= \int_{[0,\Lambda]} \lim_{t\to 0} \frac{1}{q+1} b\frac{|u+tv|^{q+1} - |u|^{q+1}}{t} dx \\ &= \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q-1}uv dx.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial J_3(u)}{\partial v} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{q+1} \int_{[0,\Lambda]} b\frac{|u+tv|^{q+1} - |u|^{q+1}}{t} dx = \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q-1}uv dx$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial J_3(u)}{\partial v} = \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q-1}uv dx$$

(ii) Se procede a demostrar que $\frac{\partial J_3(u)}{\partial v}$ es lineal y contínuo. Sea $k \in \mathbb{R}$, y $v_1, v_2 \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_3(u)}{\partial(kv_1+v_2)} &= \int_{[0,\Lambda]} |u|^{q-1}\ u(kv_1+v_2)dx \\ &= k\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q-1}\ u\ v_1dx + \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q-1}\ u\ v_2dx \\ &= k\frac{\partial J_3(u)}{\partial v_1} + \frac{\partial J_3(u)}{\partial v_2},\ \ \forall u.v \in E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda]).\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial J_3(u)}{\partial(v_1)}\right| &= \left|\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q-1}\ u\ vdx\right| = \left|\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q}\ vdx\right| \\ &\leq \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q}\ |v|dx\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Holder

$$\begin{aligned}\int_{[0,\Lambda]} b|u|^q vdx &\leq |\overline{b}|\left(\int_{[0,\Lambda]} |u|^{q\frac{p}{q}}dx\right)^{\frac{q}{p}}\left(\int_{[0,\Lambda]} |v|^{\frac{p}{p-q}}dx\right)^{\frac{p-q}{p}} \\ &\leq \overline{b}\|u\|_{L^p}^q\left(\int_{[0,\Lambda]} |1|^{\frac{p-q}{p-q-1}}dx\right)^{\frac{p-q-1}{p-q}}\left(\int_{[0,\Lambda]} |v|^{\frac{p}{p-q}(p-q)}dx\right)^{\frac{1}{p-q}\frac{p-q}{p}\frac{p}{p-q}} \\ &= \overline{b}\|u\|_{L^p}^q|\Lambda|^{\frac{p-q-1}{p-q}}\|v\|_{L^p}^{\frac{p}{p-q}} \\ &\leq \overline{b}\left(\frac{\Lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^q\|u\|_{E_0^{\alpha,p}}^q|\Lambda|^{\frac{p-q-1}{p-q}}\left(\frac{\Lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{\frac{p}{p-q}}\|v\|_{E_0^{\alpha,p}}^{\frac{p}{p-q}} \\ &\leq \overline{b}\frac{\Lambda^{q\alpha+\frac{p-q-1}{p-q}+\frac{p\alpha}{p-q}}}{\Gamma(\alpha+1)^{q\alpha+\frac{p}{p-q}}}\|u\|_{E_0^{\alpha,p}}^q\|v\|_{E_0^{\alpha,p}}^{\frac{p}{p-q}}.\end{aligned}$$

(iii) Si $u_n \to u$ en $E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$ entonces $\frac{\partial J_3(u_n)}{\partial v} \to \frac{\partial J_3(u)}{\partial v}$ existe $(E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda])^*$.

Sea $(u_n)\subset E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$ y $u\in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$ con $u_n\to u$ *en* $E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial J_3(u_n)}{\partial v}-\frac{\partial J_3(u)}{\partial v}\right| &= \left|\int_{[0,\Lambda]} b|u_n|^{q-1}\ u_n\ vdx-\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q-1}\ u\ vdx\right|\\
&= \left|\int_{[0,\Lambda]}\left(b|u_n|^{q-1}\ u_n-|u|^{q-1}\ u\right)vdx\right|\\
&\leq k\bar{b}\int_{[0,\Lambda]}|u_n-u|\left(|u_n|+|u|\right)^{q-1}\ vdx\\
&\leq k\bar{b}\int_{[0,\Lambda]}|(u_n-u)|\left(|u_n|+|u|\right)^{q-1}\ vdx\\
&\leq k\bar{b}\left(\int_{[0,\Lambda]}|(u_n-u)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{[0,\Lambda]}(|u_n|+|u|^{q-1})^{p'}(v)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&\leq k\bar{b}\|(u_n-u)\|_{L^p}\left(\int_{[0,\Lambda]}(|u_n|+|u|)^{(q-1)p'\frac{p}{(q-1)p'}}\right)^{\frac{(q-1)p'}{p}\frac{1}{p'}}\\
&\left(\int_{[0,\Lambda]}|v|^{p'r}dx\right)^{\frac{1}{rp'}}\\
&\leq k\bar{b}\|u_n-u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}\||u_n|+|u|\|_{L^p}^{q-1}\|v\|_{L^p}^{\frac{p-1}{r}}\\
&\leq k\bar{b}s\lambda\|u_n-u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}(\|u_n\|_{L^p}+\|u\|_{L^p})^{q-1}\|v\|_{L^p}^{\frac{p-1}{r}}\\
&\leq C_1s\|u_n-u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}(\|u_n\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}+\|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]})^{q-1}\|v\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}^{\frac{p-1}{r}}
\end{aligned}$$

Luego

$$\sup_{\|v\|_{E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])}\leq 1}\left|\frac{\partial J_3(u_n)}{\partial v}-\frac{\partial J_3(u)}{\partial v}\right|\leq C\|u_n-u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}\to 0,\ cuando\ n\to\infty$$

Si la derivada de Gateaux existe entonces una candidata es $\frac{\partial J_1(u)}{(v)}$

$$\begin{aligned}
&J_1'(u)v=\frac{\partial J_1(u)}{\partial v},\ \ \forall u,v\in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]\\
&\lim_{\|v\|\to 0}\frac{1}{\|wt\|}\left[J_1(u+v)-J_1(u)-J_1'(u)vdx\right],\ \ sea\ v=wt\\
&\lim_{\|wt\|\to 0}\frac{1}{\|wt\|}\left[J_1(u+wt)-J_1(u)-J_1'(u)wt\right]=\\
&\lim_{\|wt\|\to 0}\frac{J_1(u+wt)-J_1(u)}{\|wt\|}-\lim_{\|wt\|\to 0}\frac{J_1'(u)wt}{\|wt\|}=\\
&\lim_{\|wt\|\to 0}\frac{J_1(u+wt)-J_1(u)}{t}\frac{1}{\|w\|}-\lim_{\|wt\|\to 0}\frac{J_1'(u)wt}{t\|w\|}=\\
&\lim_{\|wt\|\to 0}J_1'(u)w\frac{1}{\|w\|}-\lim_{\|wt\|\to 0}\frac{J_1'(u)w}{\|w\|}=\\
&\lim_{\|wt\|\to 0}\frac{0}{\|w\|}=0
\end{aligned}$$

De forma similar se demuestra $J_2'(u)v = \frac{\partial J_2(u)}{\partial v}, J_3'(u)v = \frac{\partial J_3(u)}{\partial v}$ $\forall u, v \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$. Por lo tanto, se concluye que $J_\lambda \in C^1(E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda], \mathbb{R})$. ■

3.1.2 Funcional de energía

El funcional de energía asociado al problema P_0, es dado por

$$\begin{aligned} J_\lambda : E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda] &\to \mathbb{R} \\ u \to J_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\int_{[0,\Lambda]} |\,_0D_x^\alpha u|^p dx - \frac{\lambda}{p}\int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx - \frac{1}{q+1}\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1}dx \end{aligned} \tag{3.16}$$

De acuerdo con el teorema 3.1, J_λ es un funcional de clase $C^1(E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda], \mathbb{R})$ cuya derivada de Gateaux en $u \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$ es dada por

$$J_\lambda'(u)v = \int_{[0,\Lambda]} |\,_0D_x^\alpha u|^{p-2}\,_0D_x^\alpha u\,_0D_x^\alpha v dx - \lambda\int_{[0,\Lambda]} |u|^{p-2}uvdx - \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q-1}uvdx; \tag{3.17}$$

para toda dirección $v \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$.
En este caso $u \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$, es solución débil para el problema P_0 si y solamente si, es punto crítico del funcional J_λ.
El siguiente Lema explica el comportamiento del funcional de energía $J_\lambda(u)$ en el espacio fraccionario $E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$.

Lema 3.1
1. Suponga que $\lambda < \lambda_1$; entonces J_λ es acotado inferiormente en $E_0^{\alpha,p}$.
2. Si $\lambda > \lambda_1$, entonces J_λ no es acotado inferiormente.

Demostración. En efecto

1. De forma similar a lo trabajado por Torres [55, 57] se tiene que λ_1 es el primer autovalor del problema P_0 es:

$$\lambda_1 = \min_{u\in E_0^{\alpha,p}} \frac{\int_0^\Lambda |\,_0D_x^\alpha u|^p dx}{\int_0^\Lambda |u|^p dx}, \quad u \neq 0,$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx &\leqslant \int_{[0,\Lambda]} |_0D_x^\alpha u|^p dx \\ \lambda_1 \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx - \lambda\int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx &\leqslant \int_{[0,\Lambda]} |\,_0D_x^\alpha u|^p dx - \lambda\int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx \\ \int_{[0,\Lambda]} |\,_0D_x^\alpha u|^p dx - \lambda\int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx &\geqslant (\lambda_1 - \lambda)\int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx, \ \ \forall u \in E_0^{\alpha,p} \end{aligned} \tag{3.18}$$

se obtiene que,

$$J_\lambda(u) \geq \frac{(\lambda_1 - \lambda)}{p}\int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx - \frac{1}{q+1}\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1}dx, \tag{3.19}$$

luego como $b \in L^\infty([0,\Lambda])$ se puede considerar que $b < \|b\|_{L^\infty([0,\Lambda])} = \bar{b}$ y así,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) \geq & \frac{1}{p}(\lambda_1 - \lambda)\int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx - \frac{\bar{b}}{q+1}\int |u|^{q+1} dx \\ J_\lambda(u) \geq & \frac{1}{p}(\lambda_1 - \lambda)\int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx - \frac{\bar{b}}{q+1}|\Lambda|^{1-(q+1)/p}\left(\int |u|^p dx\right)^{(q+1)/p} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Por lo tanto, J_λ es acotado inferiormente en $E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$ cuando $\lambda < \lambda_1$.

2. Si $\lambda > \lambda_1$, se fija en la dirección de la autofunción principal $\phi_1 \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$, y se observa que, cuando $t \to \infty$, el funcional J_λ va para $-\infty$, esto es

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} J_\lambda(t\phi_1) &= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{\lambda_1}{p}\int_{[0,\Lambda]} |t\phi_1|^p dx - \frac{\lambda}{p}\int_{[0,\Lambda]} |t\phi_1|^p dx - \frac{1}{q+1}\int_{[0,\Lambda]} b|t\phi_1|^{q+1} dx\right] \\ \lim_{t\to\infty} J_\lambda(t\phi_1) &= \lim_{t\to\infty} |t|^p\left[\frac{(\lambda_1-\lambda)}{p}\int_{[0,\Lambda]} |\phi_1|^p dx - \frac{1}{(q+1)t^{p-(q+1)}}\int_{[0,\Lambda]} b|\phi_1|^{q+1} dx\right] \end{aligned}$$

se tiene que $\lim_{t\to\infty} J_\lambda(t\phi_1) = -\infty$, por lo tanto, J_λ no es acotado inferiormente en $E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$ cuando $\lambda > \lambda_1$.

■

3.2 Variedad de Nehari y función de fibrado

Del lema 3.1 no es posible la minimización en todo el espacio $E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$. En este caso se puede considerar la variedad de Nehari, introducida en [37]. La variedad de Nehari para el problema P_0 es definida por

$$N_\lambda = \{u \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda] : \langle J'_\lambda(u), u\rangle = 0, u \neq 0\},$$

En realidad, así como está definida, N_λ es apenas un conjunto. Más adelante daremos las condiciones para que N_λ sea una variedad diferenciable.

Observación: Tenga en cuenta que la elección del conjunto N_λ es conveniente, dado que las soluciones a nuestro problema P_0 pertenecen a dicho conjunto. Por tanto, debemos demostrar que $N_\lambda \neq \emptyset$, de modo que pueda haber puntos críticos no triviales del funcional J_λ, y por tanto soluciones al problema P_0.

Proposición 3.2

Existe $c_0 > 0$ tal que $\|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]} \geq c_0$ para todo $u \in N_\lambda$. En consecuencia, N_λ es un subconjunto cerrado de $E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$.

Demostración. De la desigualdad de Poincaré (2.26) se sigue que

$$\|u\|_{L^p} \leq \frac{\Lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|{}_0D_t^\alpha u\|_{L^p} = \frac{\Lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}. \tag{3.21}$$

Además, como $b \in L^\infty[0,\Lambda]$, por la inyección contínua $L^p[0,\Lambda] \hookrightarrow L^{q+1}[0,\Lambda]$, existe una constante c, tal que $\|u\|_{L^{q+1}[0,\Lambda]} \leq c\|u\|_{L^p[0,\Lambda]}$, ahora considerando $b < \|b\|_{L^\infty[0,\Lambda]}$ se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx &< \|b\|_{L^\infty[0,\Lambda]} \|u\|_{L^{q+1}}^{q+1} \\
&< \|b\|_{L^\infty[0,\Lambda]} c^{q+1} \|u\|_{L^p}^{q+1} \\
&< \|b\|_{L^\infty[0,\Lambda]} c^{q+1} \frac{\Lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}.
\end{aligned}$$

Dado que $u \in N_\lambda$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,\Lambda]} |{}_0D_x^\alpha u|^p dx - \lambda \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx - \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx = 0 \\
&\int_{[0,\Lambda]} |{}_0D_x^\alpha u|^p dx - \lambda \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx = \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx \\
&\int_{[0,\Lambda]} |{}_0D_x^\alpha u|^p dx + \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx - \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx - \lambda \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx = \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx \\
&\|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}^p - (1+\lambda)\|u\|_{L^p}^p = \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx < \|b\|_{L^\infty[0,\Lambda]} c^{q+1} \frac{\Lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}^{q+1} \\
&\|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}^p \leq (1+\lambda) \frac{\Lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}^p + \|b\|_{L^\infty[0,\Lambda]} c^{q+1} \frac{\Lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}^{q+1}.
\end{aligned}$$

Considerando $c_1 = (1+\lambda)\frac{\Lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ y $c_2 = \|b\|_{L^\infty[0,\Lambda]} c^{q+1} \frac{\Lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$. Luego

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}^p \leq c_1 \|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}^p + c_2 \|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}^{q+1} \\
&\|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}^p \geq -c_1 \|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}^p + c_2 \|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}^{q+1} \\
&\|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]} \geq [\frac{c_2}{1+c_1}]^{\frac{1}{p-(q+1)}} = c_0 > 0.
\end{aligned}$$

Es decir que $\|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]} \geq c_0 > 0, \quad \forall u \in N_\lambda$; en consecuencia N_λ es un subconjunto cerrado de $E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$. ■

Teorema 3.2

El funcional J_λ es coercivo y acotado inferiormente en N_λ.

Demostración. De la definición de J_λ, así como $b \in L^\infty[0,\Lambda]$, usando la equivalencia (2.28), y la inyección contínua de $L^p[0,\Lambda] \hookrightarrow L^{q+1}[0,\Lambda]$, existe C_1, tal que $\|u\|_{L^{q+1}[0,\Lambda]} \leq C_1 \|u\|_{L^p[0,\Lambda]}$,

$$J_\lambda(u) \geq \frac{1}{p} \|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]} - \frac{\lambda}{p} \|u\|_{L^p[0,\Lambda]}^p - \frac{1}{q+1} \|b\|_\infty C_1 \|u\|_{L^p[0,\Lambda]}^{q+1}. \tag{3.22}$$

Además, de la inyección contínua de $E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda] \hookrightarrow L^p[0,\Lambda]$, existe C_2, tal que $\|u\|_{L^p[0,\Lambda]} \leq C_2\|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}$.
Se tiene

$$J_\lambda(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|^p_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]} - \frac{\lambda}{p}C_2\|u\|^p_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]} - \frac{1}{q+1}\|b\|_\infty C_1C_2\|u\|^{q+1}_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}. \tag{3.23}$$

lo cual implica que

$$J_\lambda(u) \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{\lambda}{p}C_2\right)\|u\|^p_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]} - \frac{1}{q+1}\|b\|_\infty C_3\|u\|^{q+1}_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}. \tag{3.24}$$

Recordando que $1 < q < p-1$, luego $2 < q+1 < p$, se sigue que

$$J_\lambda(u) \to +\infty \;\; cuando \;\; \|u\|_{E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])} \to \infty.$$

El funcional J_λ es acotado inferiormente.
En efecto, si J_λ es coercivo, dado $M = 1$ existe $R > 0$ tal que

$$J_\lambda(u) \geq 1, \;\; para \;\; \|u\|_{E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])} \geq R \tag{3.25}$$

Si $u \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$ y $\|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]} \leq R$, se tiene

$$\begin{aligned}
|J_\lambda(u)| \leq & \frac{1}{p}\|u\|^p_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]} + \frac{\lambda}{p}\|u\|^p_{L^p[0,\Lambda]} + \frac{1}{q+1}\|b\|_\infty C_1\|u\|^{q+1}_{L^p[0,\Lambda]} \\
\leq & \frac{1}{p}\|u\|^p_{E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])} + \frac{\lambda}{p}C_2\|u\|^p_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]} + \frac{1}{q+1}\|b\|_\infty C_1C_2\|u\|^{q+1}_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]} \\
\leq & \frac{1}{p}R^p + \frac{\lambda}{p}C_2R^p + \frac{1}{q+1}\|b\|_\infty C_3R^{q+1} = K,
\end{aligned}$$

por consiguiente se tiene que,

$$J_\lambda(u) \geq -K. \tag{3.26}$$

De (3.25) y (3.26),

$$J_\lambda(u) \geq -K, \;\; \forall u \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$$

demostrando que J_λ en $E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$ es acotado inferiormente. ■

El teorema 3.2, nos garantiza la existencia de una sucesión minimizante en N_λ. A continuación, definimos una función muy importante para el estudio del problema P_λ.
La variedad de Nehari esta asociada al comportamiento de funciones denominada de función de fibrado.

3.2.1 Función de fibrado

Conocida como **función de fibrado**, fue introducida por Drabek y Pohozaev [12], asimismo, en el trabajo de Brown y Zhang [7], se puede ver un ejemplo.

Definición 3.1
Sea $t \in \mathbb{R}^+$, se define la función de fibrado como:

$$
\begin{aligned}
\phi_u : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\
t \to \phi_u(t) &= J_\lambda(tu) \\
&= \frac{1}{p}\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha (tu)|^p dx - \frac{\lambda}{p}\int_{[0,\Lambda]} |(tu)|^p dx - \frac{1}{q+1}\int_{[0,\Lambda]} b|(tu)|^{q+1} dx \\
&= \frac{t^p}{p}\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha u|^p - \lambda |u|^p)\,dx - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx.
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

Así se escribe

$$
\phi_u(t) = \frac{t^p}{p}\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha u|^p - \lambda |u|^p)\,dx - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx \tag{3.28}
$$

luego, derivando $\phi_u(t) = J_\lambda(tu)$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\phi_u'(t) &= J_\lambda'(tu)u \\
&= t^{p-1}\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha u|^p - \lambda |u|^p)\,dx - t^q\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

Observe que, como $t > 0$, se sigue de (3.29) que

$$
\phi_u'(t) = \frac{1}{t} J_\lambda'(tu)tu \tag{3.30}
$$

Esto implica que $t > 0$, es punto crítico de ϕ_u, si y solo si, $tu \in N_\lambda$. En particular, $u \in N_\lambda$, si y solo si, $t = 1$ es punto crítico de ϕ_u.
De esta manera, la tarea de demostrar que $N_\lambda \neq \emptyset$ puede ser sustituida por encontrar puntos críticos para la función de fibrado.
Encontrar explícitamente los puntos críticos de ϕ_u es inviable, por esa razón se define la siguiente función auxiliar.

$$
m_u(t) = \int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha u|^p dx - t^{q-(p-1)}\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx. \tag{3.31}
$$

Derivando (3.31), se tiene

$$
\begin{aligned}
m_u'(t) &= [(p-1)-q]\,t^{q-p}\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx \\
m_u''(t) &= [(p-1)-q]\,(q-p)t^{q-p-1}\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Dejando en evidencia t^{p-1} en la ecuación (3.29), se tiene la siguiente equivalencia

$$
\begin{aligned}
\phi_u'(t) &= t^{p-1}\left(\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha u|^p - \lambda |u|^p)\,dx - t^{q-(p-1)}\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx\right) \\
&= t^{p-1}\left(\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha u|^p dx - t^{q-(p-1)}\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx - \int_{[0,\Lambda]} \lambda |u|^p dx\right) \\
&= t^{p-1}\left(m_u(t) - \int_{[0,\Lambda]} \lambda |u|^p dx\right).
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

De esta manera, de (3.33) y (3.30), se obtine las siguientes equivalencias

$$tu \in N_\lambda \Leftrightarrow \phi_u'(t) = 0 \Leftrightarrow m_u(t) = \lambda \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx, \ \ t > 0. \tag{3.34}$$

A partir de ahora, se puede decidir entre demostrar que la variedad de Nehari, N_λ, es no vacía; encontrar puntos críticos para la función de fibrado o resolver la ecuación $m_u(t) = \lambda \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx$, para $t > 0$.

Observación: Dado $t > 0$, es un punto crítico de ϕ_u, si y solo si, es una solución de la ecuación

$$m_u(t) = \lambda \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx. \tag{3.35}$$

Calculando la segunda derivada de ϕ_u, se tiene que

$$\begin{aligned} \phi_u''(t) &= (p-1)t^{p-2} \int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha u|^p - \lambda |u|^p)\, dx - qt^{q-1} \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx \\ &= \frac{1}{t^2} \left((p-1) \int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha tu|^p - \lambda |tu|^p)\, dx - q \int_{[0,\Lambda]} b|tu|^{q+1} dx \right) \\ &= \frac{1}{t^2} \phi_{tu}''(1), \ \ t > 0. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Si $u \in N_\lambda$, entonces $t = 1$ es un punto crítico de la función ϕ_u. Siendo esto así, se puede caracterizarlo de acuerdo con el signo de la segunda derivada de ϕ_u, esto es, verificar si $\phi_u''(1) > 0,\ \phi_u''(1) < 0,\ o\ \phi_u''(1) = 0$. En el caso del problema P_0, se verá más adelante, que esa caracterización equivale a verificar si el punto crítico es un punto mínimo local, máximo local o de inflexión, respectivamente. De esta manera, de forma similar al método utilizado por Tarantello [52], se subdivide N_λ en tres subconjuntos:

$$\begin{aligned} N_\lambda^+ &= \left\{ u \in N_\lambda : \phi_u''(1) > 0 \right\} \\ N_\lambda^- &= \left\{ u \in N_\lambda : \phi_u''(1) < 0 \right\} \\ N_\lambda^0 &= \left\{ u \in N_\lambda : \phi_u''(1) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Observación: Si $t > 0$ es tal que $tu \in N_\lambda$ $(esto\ es\ ,\ si\ \phi_u'(t) = 0\ o\ \phi_{tu}'(1) = 0)$, entonces de la definicón de N_λ y (3.36), se sigue que

$$
\begin{aligned}
\phi_u''(t) &= [(p-1)t^{p-2} - qt^{q-1}] \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx \\
\phi_{tu}''(1) &= [(p-1)1^{p-2} - q1^{q-1}] \int_{[0,\Lambda]} b|tu|^{q+1} dx \\
\phi_{tu}''(1) &= [(p-1) - q]t^{q+1} \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx \\
&= [(p-1) - q]t^{q-p+p+1} \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx \\
&= t^{p+1}[(p-1) - q]t^{q-p} \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx \\
&= t^{p+1} m_u'(t)
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

De (3.36), (3.32), y (3.37), implica que

$$
\phi_u''(t) = \frac{1}{t^2}\phi_{tu}''(1) = t^{p-1} m_u'(t). \tag{3.38}
$$

La ecuación (3.38) nos dice que para caracterizar un punto crítico de ϕ_u es suficiente observar el signo de la primera derivada de m_u' relativa en tal punto.

Una vez definidos los subconjuntos de N_λ, estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema que nos da una condición suficiente para que el conjunto N_λ sea una variedad diferenciable.

Teorema 3.3

Si $N_\lambda^0 = \emptyset$, entonces el conjunto N_λ es una variedad de clase $C^1[0,\Lambda]$.

Demostración. Se tiene que $N_\lambda = G_\lambda^{-1}(\{0\})$, donde $G_\lambda : E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda] \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, es una función definida por:

$$
G_\lambda(u) = \langle J_\lambda'(u), u\rangle = \int_{[0,\Lambda]} |{}_0D_x^\alpha u|^p dx - \lambda \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx - \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx. \tag{3.39}
$$

Observe que G_λ es una función de clase $C^1[0,\Lambda]$, cuya derivada de Gateaux en $u \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda] \setminus \{0\}$, en la dirección del vector v, es dada por

$$
\langle G_\lambda'(u), v\rangle = p\int_{[0,\Lambda]} |{}_0D_x^\alpha u|^{p-1}\, {}_0D_x^\alpha v dx - \lambda p \int_{[0,\Lambda]} |u|^{p-1} v dx - (q+1)\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q-1} uv dx. \tag{3.40}
$$

Se quiere probar que $N_\lambda = G_\lambda^{-1}(\{0\})$ es variedad. En efecto, se va a demostar que 0 es valor regular de $G_\lambda(u)$. Esto es equivalente a demostrar que, para todo $u \in N_\lambda$, la función $G_\lambda : E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda] \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ es sobreyectiva, es decir, que exista $v \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$ tal que $\langle G_\lambda'(u), v\rangle \neq 0$. Pero como $u \in N_\lambda$, simplemente tome $v = u$ y se tiene

$$
\begin{aligned}
\langle G'_\lambda(u), u\rangle &= p\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha u|^p dx - \lambda p\int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx - (q+1)\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx \\
&= (p-1)\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha u|^p dx - \lambda(p-1)\int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx - \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx \\
&+ \int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha u|^p dx - \lambda\int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx - q\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx \\
&= \phi''_u(1) + \langle J'_\lambda(u), u\rangle \\
&= \phi''_u(1)
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

Como $N_\lambda^0 = \emptyset$, se tiene que $\phi''_u(1) \neq 0$, y por lo tanto $G_\lambda : E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda] \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ es sobreyectiva para cada $u \in N_\lambda$. Así terminamos la demostración. ■

Observación: Si $u \in N_\lambda$, el funcional $J_\lambda : E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda] \to \mathbb{R}$ se puede escribir como

$$
J_\lambda(u) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q+1}\right)\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx \tag{3.42}
$$

Dado que

$$
\begin{aligned}
\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha u|^p dx - \lambda\int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx - \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx = 0 \\
\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha u|^p dx - \lambda|u|^p)\, dx = \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx.
\end{aligned} \tag{3.43}
$$

La siguiente proposición relaciona la variedad de Nehari y la función de fibrado

Proposición 3.3

Sea $\phi_u(t)$ la función definida en (3.27) y $u \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$, entonces:

1. $u \in N_\lambda$, si y solo si, $\phi'_u(1) = 0$
2. $tu \in N_\lambda$, si y solo si, $\phi'_u(t) = 0$

Demostración. 1. Si $t = 1$ en (3.29) se tiene que,

$$
\phi'_u(1) = \int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha u(x)|^p dx - \lambda\int_{[0,\Lambda]} |u(x)|^p dx - \int_{[0,\Lambda]} b(x)|u|^{q+1} dx = J'_\lambda(u)u
$$

2. Vea primero ($\Leftarrow$)

$$
\begin{aligned}
0 =& \phi'_u(t) = t^{p-1}\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha u|^p - \lambda|u|^p)\, dx - t^q\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx \\
0 =& t^p\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha u|^p - \lambda|u|^p)\, dx - t^{q+1}\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx = J'_\lambda(tu)tu
\end{aligned}
$$

$(\Rightarrow)$ Como $tu \in N_\lambda$, se tiene

$$0 = J'_\lambda(tu)tu = t^p \int_{[0,\Lambda]} (|\,_0D_x^\alpha u|^p - \lambda |u|^p)\, dx - t^{q+1} \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx$$
$$0 = t^{p-1} \int_{[0,\Lambda]} (|\,_0D_x^\alpha u|^p - \lambda |u(x)|^p)\, dx - t^q \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx = \phi'_u(t)$$

■

Corolario 3.1 Si $u \in N_\lambda$, es decir, si $\phi'_u(1) = 0$, de (3.43) y (3.36), se tiene que

$$\phi''_u(1) = [(p-1) - q] \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx \tag{3.44}$$

Lema 3.2 Si $tu \in N_\lambda$, se sigue de (3.44) y (3.32) que

$$\phi''_{tu}(1) = t^{p+1} m'_u(t) \tag{3.45}$$

Demostración. En efecto, si $\phi'_u(1) = 0$ de (3.29) se tiene

$$\phi''_u(1) = [(p-1) - q] \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx.$$

Luego, sea $tu \in N_\lambda$, entonces se tiene que,

$$\phi''_{tu}(1) = [(p-1) - q]\, t^{q+1} \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx =$$
$$= t^{p+1}.t^{q-p} [(p-1) - q] \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx$$

de (3.32), se tiene que

$$\phi''_{tu}(1) = t^{p+1} m'_u(t) \tag{3.46}$$

■

Lema 3.3

$$tu \in N_\lambda^+ \Longleftrightarrow m'_u(t) > 0$$
$$tu \in N_\lambda^- \Longleftrightarrow m'_u(t) < 0.$$

Demostración. El resultado sigue por el Lema 3.2.1,

$$tu \in N_\lambda^+ \Longleftrightarrow \phi''(1) \Longleftrightarrow m'_u(t) > 0$$
$$tu \in N_\lambda^- \Longleftrightarrow \phi''(1) \Longleftrightarrow m'_u(t) < 0$$

■

Teorema 3.4 (Teorema de los Multiplicadores de Lagrange)

Sean X un espacio de Banach, $J, F :\to \mathbb{R}$ funcionales de clase $C^1(R, \mathbb{R})$ y $M = \{x \in X : F(u) = 0\} = F^{-1}(\{0\})$ con $F'(u) = 0$, para todo $u \in M$. Si J es acotado inferiormente sobre M y existe $u_0 \in M$ tal que

$$J(u_0) = \inf_{u \in M} J(u), \tag{3.47}$$

entonces existe $\delta \in \mathbb{R}$ verificando

$$J'(u_0) = \delta F'(u_0). \tag{3.48}$$

Demostración. Ver el libro de Kavian Otered ([25], 1993, prop 14.3, página 55). ■

El siguiente lema exhibe una condición suficiente para que la minimización sobre Nehari genere puntos críticos para el funcional J_λ.

Lema 3.4 Suponga que $u_0 \in N_\lambda$ es un punto máximo o mínimo local para J_λ en N_λ. Entonces si $u_0 \notin N_\lambda^0$, u_0 es un punto crítico de J_λ en $E_0^{\alpha,p}$.

Demostración. Si u_0 es un punto máximo o mínimo local de J_λ en N_λ, entonces u_0 es una solución del siguiente problema de optimización:

Maximizar(Minimizar) J_λ sujeto a N_λ

donde $N_\lambda = G_\lambda^{-1}\{0\}$ y G_λ es como el Teorema 13.

Entonces, por el teorema Multiplicadores de Lagrange (Teorema 3.4), existe $\delta \in \mathbb{R}$ (3.48), tal que

$$\langle J'_\lambda(u_0), v\rangle = \delta \ \langle G'(u_0), v\rangle, \tag{3.49}$$

para todo $v \in E_0^{\alpha,p}([0,\lambda])$. Tomando $v = u_0$ y considerando que $u_0 \in N_\lambda$, sigue de (3.41) que $\langle G'(u_0), u_0\rangle = \phi''_{u_0}(1)$, esto es diferente de cero, por hipótesis. Por tanto, de (3.49) se deduce que $\delta = 0$. Por lo tanto, u_0 es punto crítico de J_λ. ■

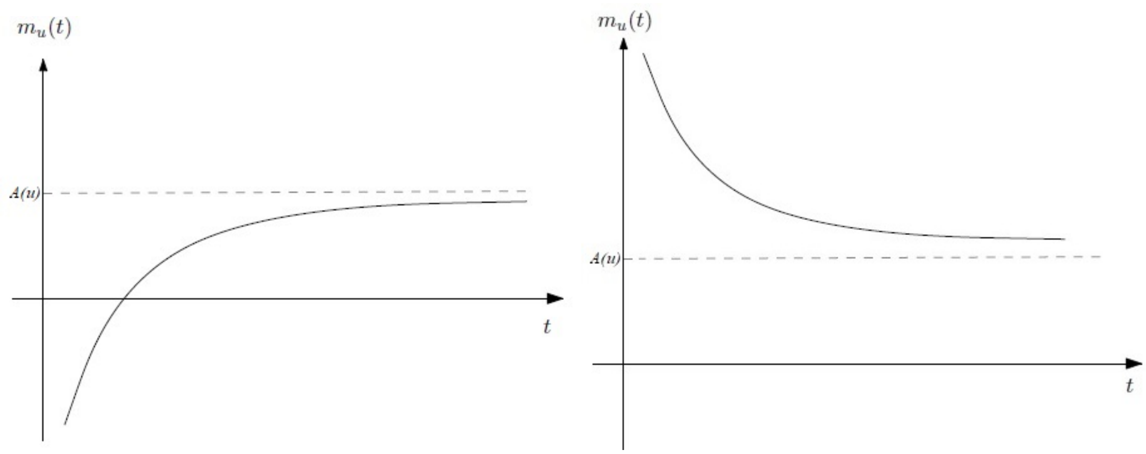
El Lema 3.4 garantiza que minimizar sobre la variedad de Nehari es eficiente para obtener puntos críticos del funcional J_λ (ya que dicho punto crítico no pertence a N_λ^0), y así obtener soluciones débiles para P_0. Sin embargo, antes de intentar encontrar esos puntos críticos, se debe verificar si la variedad de Nehari es o no vacía. De hecho analizaremos la función de fibrado definida anteriormente.

3.2.2 Comportamiento de la función m_u

El comportamiento de las funciones m_u y ϕ_u depende del signo de las integrales $\int_{[0,\Lambda]}(|\,_0D_x^\alpha u|^p - \lambda|u|^p)dx$ y $\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1}dx$. Ahora se verá todos los casos posibles para el comportamiento de la función m_u:

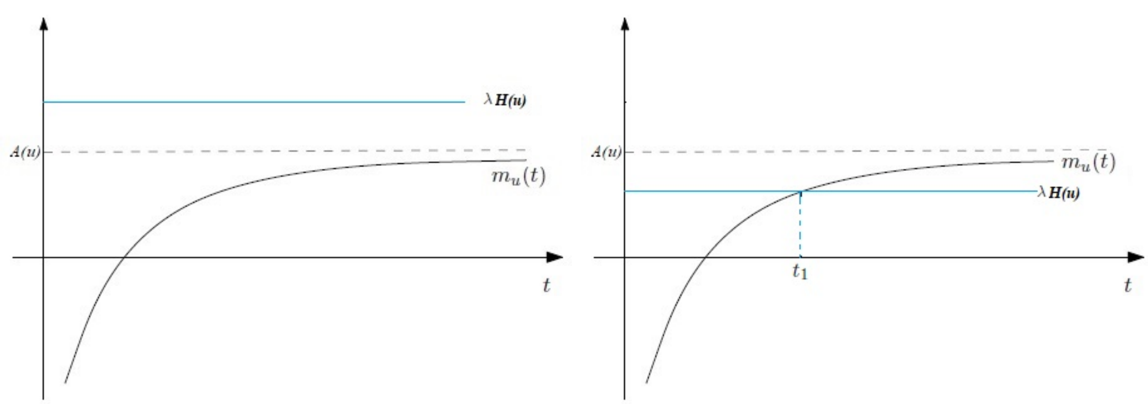
Caso A: Si $\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1}dx > 0$, la función m_u satisface las siguientes propiedades:

(a) Se deduce de (3.32) que m_u es una función estrictamente creciente en $\langle 0, +\infty \rangle$.
(b) Si $t = 0$ la derivada de la función m_u no está definida.
(c) $\lim\limits_{t \to \infty} m_u(t) = \int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^{\alpha} u|^p dx$.
(d) $\lim\limits_{t \to 0^+} m_u(t) = -\infty$.
(e) Si $\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^{\alpha} u|^p - \lambda |u|^p)\, dx < 0$, no existe ningún valor t que sea punto crítico, y por ende, que satisfaga la equivalencia (3.34).
(f) Si $\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^{\alpha} u|^p - \lambda |u|^p)\, dx > 0$, existe un único valor $\bar{t} = \left[\frac{\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx}{\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^{\alpha} u|^p - \lambda |u|^p) dx} \right]^{\frac{1}{(p-1-q)}}$, que es un punto crítico, y por ende, satisface la equivalencia(3.34).



(a) $\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx > 0$ **(b)** $\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx < 0$

Figura 3.1: Posible gráfica de la función m_u



(a) $A(u) = \int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^{\alpha} u|^p dx < \lambda \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx$ **(b)** $\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^{\alpha} u|^p dx > \lambda \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx$

Figura 3.2: Posible gráfica de la función m_u en el **Caso A**.

Caso B: Si $\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1}dx < 0$, la función m_u satisface las siguientes propiedades:

(a) Se deduce de (3.32) que m_u es una función estrictamente decreciente $\langle 0, +\infty\rangle$.

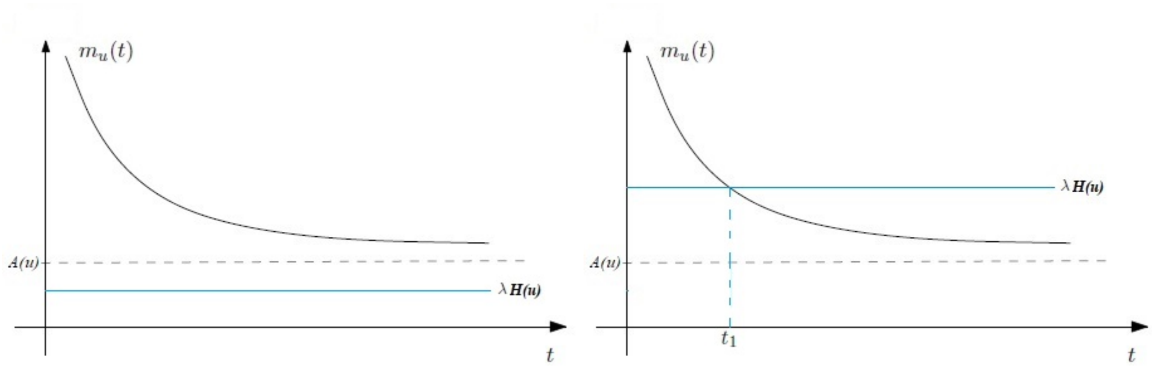
(b) Si $t = 0$ la derivada de la función m_u no está definida.

(c) $\lim\limits_{t\to\infty} m_u(t) = \int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha u|^p dx.$

(d) $\lim\limits_{t\to 0^+} m_u(t) = +\infty.$

(e) Si $\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha u|^p - \lambda|u|^p)\,dx > 0$, no existe ningún valor t que sea punto crítico, por ende que satisfaga la equivalencia (3.34).

(f) Si $\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha u|^p - \lambda|u|^p)\,dx < 0$, existe un único valor de $\bar{t} = \left[\frac{\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1}dx}{\int_{[0,\Lambda]}(|\,{}_0D_x^\alpha u|^p - \lambda|u|^p)dx}\right]^{\frac{1}{(p-1-q)}}$, que es un punto crítico, y por ende, satisface la equivalencia (3.34).



(a) $\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha u|^p dx > \lambda \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx$ **(b)** $\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha u|^p dx < \lambda \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx$

Figura 3.3: Posible gráfica de la función m_u en el **Caso B**.

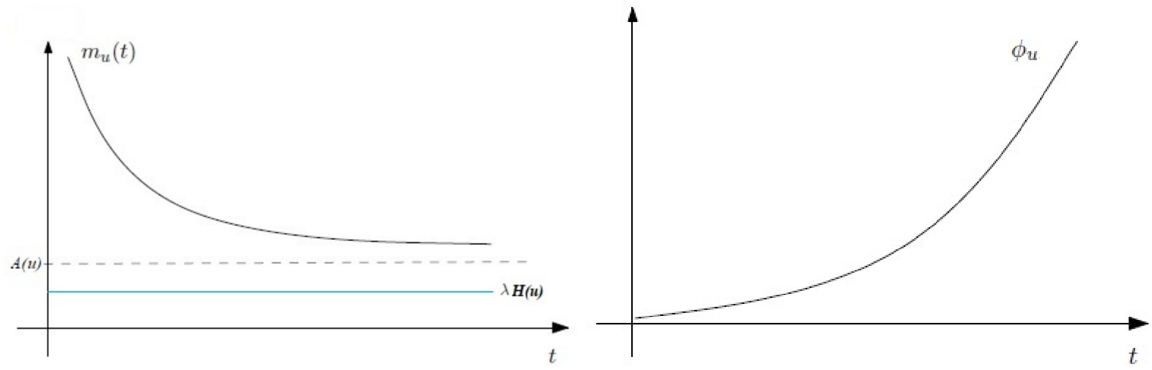
En resumen de lo anterior, se concluye que, si $\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha u|^p - \lambda|u|^p)\,dx$, $\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1}dx$ tienen el mismo signo, entonces para $u \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$ la función ϕ_u tiene un único punto crítico en $\bar{t}$, por lo tanto, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $tu \in N_\lambda$. Si $\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha u|^p - \lambda|u|^p)\,dx$ y $\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1}dx$, tienen signos diferentes, entonces ϕ_u no tiene puntos de críticos, por lo tanto no hay múltiplos de u en N_λ.

3.2.3 Análisis de la función de fibrado

Analizadas las posibilidades para la función auxiliar m_u, vamos a analizar todas las posibilidades para la función de fibrado, para lo cual se tiene cuatro casos a considerar:

Caso 1: Si $\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1}dx < 0$ y $\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha u|^p dx - \lambda|u|^p)\,dx > 0$, entonces se tiene el escenario descrito en la propiedad (e) del **Caso B**, esto se observa en la gráfica (a) de la Figura 3.3. Luego $\phi_u(t)$ es creciente (ver gráfica (b) de la Figura 3.4) pues de (3.29) se tiene que $\phi_u'(t) > 0$. Así, no se cumple la equivalencia (3.34), por lo tanto se concluye que ningún múltiplo de u está en N_λ.

Caso 2: Si $\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1}dx < 0$ y $\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha u|^p dx - \lambda|u|^p)\,dx < 0$, entonces se tiene el escenario descrito en la propiedad (f) del **Caso B**, esto se observa en (b) de la Figura 3.3. Además, se tiene que $m_u(t)$ es contínua y $\lim\limits_{t\to 0} m_u(t) = \infty$, entonces, para t_1 suficientemente pequeño se



(a) Gráfico de m_u **(b)** Gráfico de ϕ_u

Figura 3.4: Posible gráfica de ϕ_u en el **Caso 1.**

tiene

$$m_u(t_1) > \lambda \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx.$$

Además, $\lambda \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx > \int_{[0,\Lambda]} |\, {}_0D_x^\alpha u|^p dx$ y $\lim\limits_{t\to 0} m_u(t) = \int_{[0,\Lambda]} |\, {}_0D_x^\alpha u|^p dx$, entonces existe t_2 suficientemente grande tal que

$$m_u(t_2) < \lambda \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx.$$

Definiendo $m_u : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$, y siendo $m_u(t)$ una función contínua con

$$m_u(t_1) < \lambda \int_{[0,\Lambda]} |u(x)|^p dx < m_u(t_2),$$

entonces, por el teorema de Valor Intermedio existe $t_u \in \langle t_1, t_2 \rangle$ tal que,

$$m_u(t_u) = \lambda \int_{[0,\Lambda]} |u(x)|^p dx$$

Además,

$$m_u'(t) = [(p-1) - q]\, t^{q-p} \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx,$$

luego

$$m_u'(t) < 0, \; dado\ que\ t > 0,\; 1 < q < p-1,\; 2 < p < \infty$$

Por tanto $m_u(t)$ es una función estrictamente decreciente. Luego, se puede concluir que t_u es único, es decir, la ecuación (3.35) tiene una única solución t_u. Ahora se procede a demostrar que $t_u u \in N_\lambda$.

En efecto
Como $m_u(t)$ tiene una única solución, sustituyendo (3.35) en (3.31), se tiene

$$\lambda \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx = \int_{[0,\Lambda]} |\,_0D_x^\alpha u|^p dx - t_u^{q-(p-1)} \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx,$$

de allí

$$\int_{[0,\Lambda]} |\,_0D_x^\alpha u|^p dx - \lambda \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx - t_u^{q-(p-1)} \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx = 0. \tag{3.50}$$

Multiplicando la ecuación (3.50) por t_u^{p-1} se tiene

$$t_u^{p-1} \int_{[0,\Lambda]} (|\,_0D_x^\alpha u|^p - \lambda |u|^p)\, dx - t_u^q \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx = 0, \tag{3.51}$$

que es lo mismo que $J'_\lambda(t_u u) t_u u = 0$.
Consecuentemente $t_u u \in N_\lambda$. Como $t_u u \in N_\lambda$, $m'_u(t_u) < 0$ y $t > 0$, por la observación 3.2.1

$$\phi''_{t_u u}(1) = t^{p+1} m'_u(t_u) < 0$$

y esto es, $t_u u \in N_\lambda^-$. Note también que $\phi'_u(t_u) = 0$, es decir que ϕ_u tiene un único punto crítico en $t = t_u$ que es un punto máximo local.
En efecto, de (3.51), se sabe que

$$t_u^{p-1} \int_{[0,\Lambda]} (|\,_0D_x^\alpha u|^p - \lambda |u|^p)\, dx - t_u^q \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx = 0, \tag{3.52}$$

Dividiendo la ecuación (3.52) por $t_u \neq 0$ se tiene que

$$t_u^{p-2} \int_{[0,\Lambda]} (|\,_0D_x^\alpha u|^p - \lambda |u|^p)\, dx - t_u^{q-1} \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx = 0$$

Además

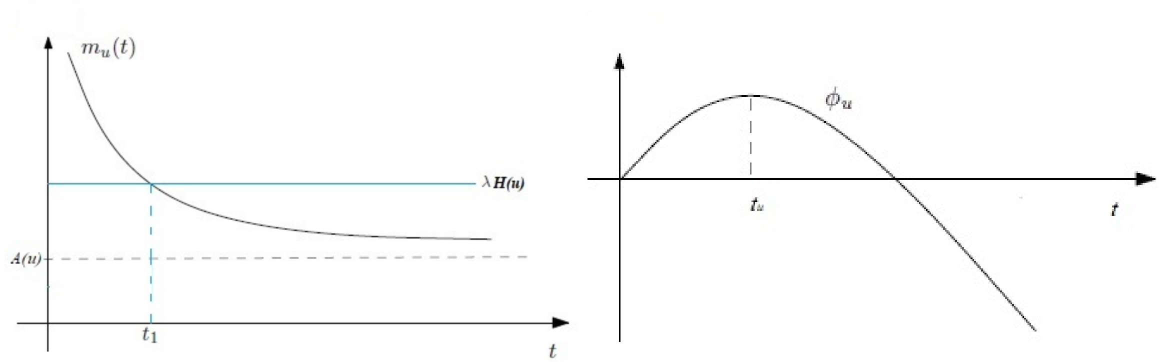
$$\lim_{t\to\infty} \phi_u(t) = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{t^p}{p} \int_{[0,\Lambda]} (|\,_0D_x^\alpha u|^p - \lambda |u|^p)\, dx - \frac{t^{q+1}}{q+1} \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx \right] = -\infty,$$

y

$$\lim_{t\to 0^+} \phi_u(t) = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{t^p}{p} \int_{[0,\Lambda]} (|\,_0D_x^\alpha u|^p - \lambda |u|^p)\, dx - \frac{t^{q+1}}{q+1} \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx \right] = 0$$

De este análisis, se sigue que la gráfica de ϕ_u es como (b) de la Figura 3.5.

Caso 3: Si $\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx > 0$ y $\int_{[0,\Lambda]} (|\,_0D_x^\alpha u|^p dx - \lambda |u|^p)\, dx > 0$, entonces se tiene el escenario descrito en la propiedad (f) del **Caso A**, esto se observa en la gráfica (a) de la Figura 3.2. Además,



(a) Gráfico de m_u **(b)** Gráfico de ϕ_u

Figura 3.5: Posible gráfica de ϕ_u en el **Caso 2.**

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} m_u(t) &= \lim_{t\to\infty}\left[\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^{\alpha}u|^p dx - t^{q-(p-1)}\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1}dx\right] \\
&= \int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^{\alpha}u|^p dx > \lambda \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

y

$$
\lim_{t\to 0^+} m_u(t) = \lim_{t\to 0^+}\left[\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^{\alpha}u|^p dx - t^{q-(p-1)}\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1}dx\right] = -\infty
$$

Como $m_u(t)$ es una función contínua con

$$
\lim_{t\to 0^+} m_u(t) < \lambda \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx < \lim_{t\to\infty} m_u(t),
$$

por el teorema de Valor Intermedio, existe $t_u \in \langle 0, +\infty\rangle$ tal que,

$$
m_u(t_u) = \lambda \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx.
$$

Además,

$$
m_u'(t) = [(p-1)-q]\, t^{q-p}\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1}dx. \tag{3.54}
$$

luego

$$
m_u'(t) > 0,\ \textit{dado que } t > 0,\ 1 < q < p-1,\ 2 < p < \infty.
$$

De este modo m_u es una función estrictamente creciente, se concluye que la ecuación (3.35) tiene a t_u como una única solución. Análogamente se ve que $t_u u \in N_\lambda$. Como $m_u(t)$ tiene una única solución, sustituyendo (3.35) en (3.31), se tiene

$$\lambda \int_{[0,\Lambda]} |u(x)|^p dx = \int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^{\alpha} u|^p dx - t_u^{q-(p-1)} \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx,$$

de allí

$$\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^{\alpha} u|^p dx - \lambda \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx - t_u^{q-(p-1)} \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx = 0. \tag{3.55}$$

Multiplicando la ecuación (3.55) por t_u^{p-1} se tiene

$$t_u^{p-1} \int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^{\alpha} u|^p - \lambda |u|^p)\, dx - t_u^q \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx = 0, \tag{3.56}$$

que es lo mismo que $J'_{\lambda}(t_u u)t_u u = 0$. Consecuentemente $t_u u \in N_{\lambda}$. Como $t_u u \in N_{\lambda}$, $m'_u(t_u) > 0$ y $t > 0$,

$$\phi''_{t_u u}(1) = t^{p+1} m'_u(t_u) > 0$$

es decir, $t_u u \in N_{\lambda}^{+}$.
Note también que $\phi'_u(t_u) = 0$, es decir que ϕ_u tiene un punto crítico que es un punto mínimo local en $t = t_u$.
En efecto,

$$t_u^{p-1} \int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^{\alpha} u|^p - \lambda |u|^p)\, dx - t_u^q \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx = 0, \tag{3.57}$$

Se divide la ecuación (3.57) por t_u, se sigue que

$$t_u^{p-2} \int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^{\alpha} u|^p - \lambda |u|^p)\, dx - t_u^{q-1} \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx = 0, \tag{3.58}$$

Además,

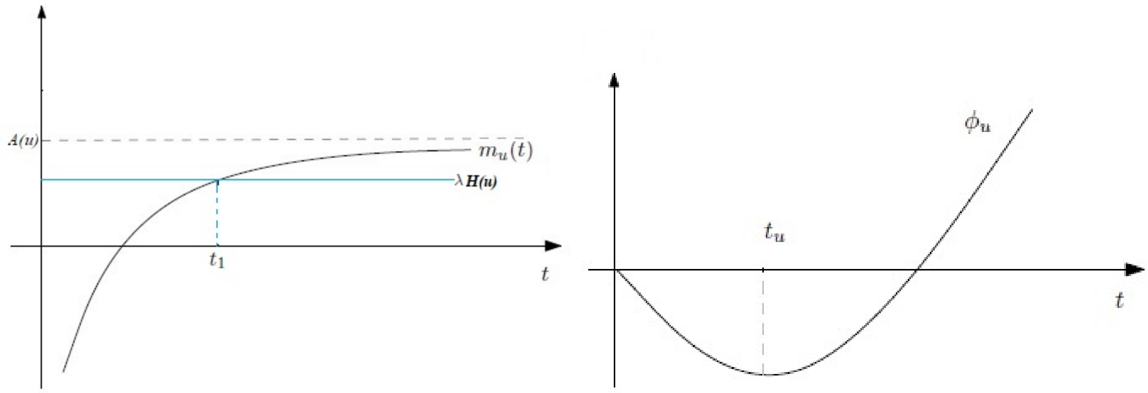
$$\lim_{t\to\infty} \phi_u(t) = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{t^p}{p} \int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^{\alpha} u|^p - \lambda |u|^p)\, dx - \frac{t^{q+1}}{q+1} \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx \right] = \infty$$

y

$$\lim_{t\to 0^+} \phi_u(t) = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{t^p}{p} \int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^{\alpha} u|^p - \lambda |u|^p)\, dx - \frac{t^{q+1}}{q+1} \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx \right] = 0$$

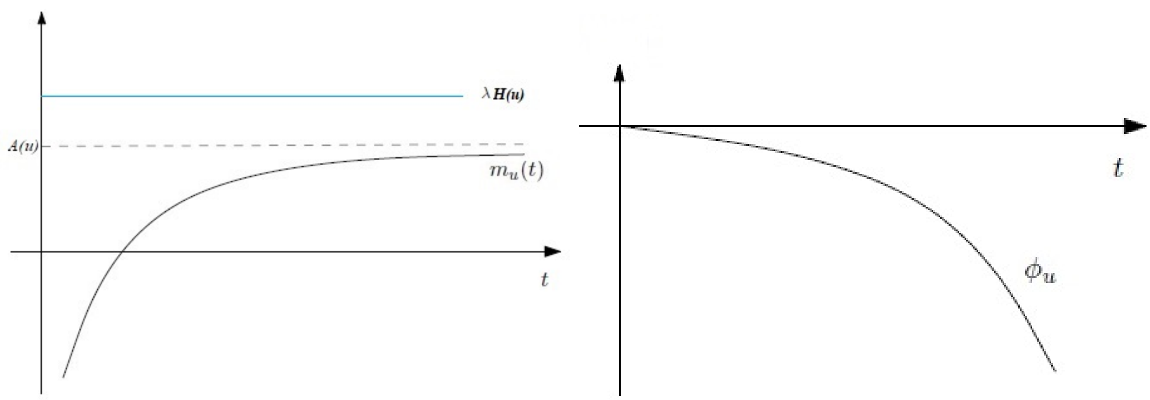
De este análisis, se conluye que la gráfica de ϕ_u es como (b) de la Figura 3.6.

Caso 4: Si $\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx > 0$ y $\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^{\alpha} u|^p - \lambda \int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx < 0$, entonces se tiene el escenario descrito en la propiedad (e) del **Caso A**, esto se observa en la gráfica (b) de la Figura 3.2. Luego $\phi_u(t)$ es decreciente(ver gráfica (b) de la Figura 3.7) pues de 3.36 se tiene que $\phi'_u(t) < 0$. Así, no se cumple la equivalencia 3.34, por lo tanto se concluye que ningún múltiplo de u está en N_{λ}.



(a) Gráfico de m_u **(b)** Gráfico de ϕ_u

Figura 3.6: Posible gráfica de ϕ_u en el **Caso 3.**



(a) Gráfico de m_u **(b)** Gráfico de ϕ_u

Figura 3.7: Posible gráfica de ϕ_u en el **Caso 4.**

Después de este análisis, ahora se puede definir:

$$L_{+}(\lambda) = \left\{ u \in E_0^{\alpha,p} : \|u\| = 1, \int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^{\alpha} u|^p - \lambda |u|^p)\, dx > 0 \right\}$$

$$B_{+} = \left\{ u \in E_0^{\alpha,p} : \|u\| = 1, \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx > 0 \right\}$$

$$L_{-}(\lambda) = \left\{ u \in E_0^{\alpha,p} : \|u\| = 1, \int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^{\alpha} u|^p - \lambda |u|^p)\, dx < 0 \right\}$$

$$B_{-} = \left\{ u \in E_0^{\alpha,p} : \|u\| = 1, \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx < 0 \right\}$$

$$L_{0}(\lambda) = \left\{ u \in E_0^{\alpha,p} : \|u\| = 1, \int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^{\alpha} u|^p - \lambda |u|^p)\, dx = 0 \right\}$$

$$B_{0} = \left\{ u \in E_0^{\alpha,p} : \|u\| = 1, \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx = 0 \right\}$$

En resumen se tiene lo siguiente:

(i) Si $u \in L_+(\lambda) \cap B_+$, entonces $t \to \phi_u(t)$ tiene un mínimo local $t = t_u$ y $t_u u \in N_\lambda^+$.

(ii) Si $u \in L_-(\lambda) \cap B_-$, entonces $t \to \phi_u(t)$ tiene un máximo local $t = t_u$ y $t_u u \in N_\lambda^-$.

(iii) Si $u \in L_+(\lambda) \cap B_-$, entonces $t \to \phi_u(t)$ es estrictamente creciente y ningún múltiplo de u esta en N_λ.

(iv) Si $u \in L_-(\lambda) \cap B_+$, entonces $t \to \phi_u(t)$ es estrictamente decreciente y ningún múltiplo de u esta en N_λ.

3.3 Propiedades de la variedad de Nehari

En esta sección, se muestra la importancia de la condición $L_-(\lambda) \subseteq B_-$ en la determinación de la naturaleza de la variedad de Nehari.

- Cuando $\lambda < \lambda_1$, por (3.18) se tiene que $\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha u|^p - \lambda |u|^p)\,dx > 0$, para todo $u \in E_0^{\alpha,p}$. Así
$$L_+(\lambda) = \{u \in E_0^{\alpha,p} : \|u\| = 1\}$$
y $L_-(\lambda) = \emptyset$, $L_0(\lambda) = \emptyset$.
- Cuando $\lambda = \lambda_1$, tenemos $L_-(\lambda) = \emptyset$, $L_0(\lambda) = \{\phi_1\}$.
- Cuando $\lambda > \lambda_1$, $L_-(\lambda)$ es no vacío.

De acuerdo con las consideraciones anteriores, se verá que la condición $L_-(\lambda) \subseteq B_-$ siempre se cumple cuando $\lambda < \lambda_1$, ya que en este caso el conjunto $L_-(\lambda) = \emptyset$.

Teorema 3.5

Suponga que existe $\hat{\lambda}$ tal que, para todo $\lambda < \hat{\lambda}$, $L_-(\lambda) \subseteq B_-$. Entonces, $\forall \lambda < \hat{\lambda}$, se cumple que

1. $L_0(\lambda) \subseteq B_-$ y así $L_0(\lambda) \cap B_0 = \emptyset$;
2. N_λ^+, es acotado;
3. $0 \notin \overline{N_\lambda^-}$, y N_λ^- es cerrado;
4. $\overline{N_\lambda^+} \cap N_\lambda^- = \emptyset$.

Demostración. 1. Suponga por contradicción que $L_0(\lambda) \nsubseteq B_-$. Entonces existe $u \in L_0(\lambda)$ tal que $u \notin B_-$. Luego si

$$u \in L_0(\lambda) \Rightarrow u \in E_0^{\alpha,p}, \|u\| = 1,$$

$$\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha u|^p dx - \lambda |u|^p) dx = 0$$

y

$$u \notin B_- \Rightarrow \int_{[0,\Lambda]} b \left(\frac{|u|}{\|u\|}\right)^{q+1} dx \geq 0.$$

Si $\lambda < \mu < \hat{\lambda}$, entonces

$$0 = \int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha u|^p - \lambda |u|^p) dx > \int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha u|^p - \mu |u|^p) dx \Rightarrow u \in L_-(\mu),$$

de modo que $L_-(\mu) \nsubseteq B_-$ lo cual es una contradicción a la hipótesis del teorema. Luego $L_0(\lambda) \subseteq B_-$ y siendo $B_- \cap B_0 = \emptyset$, se tiene, $L_0(\lambda) \cap B_0 = \emptyset$.

2 Suponga que N_λ^+, no es acotado. Entonces existe $\{u_n\} \subseteq N_\lambda^+$, tal que $\|u_n\| \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Sea $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. De ese modo se tiene que $\{v_n\}$ es acotada y por el teorema 2.19 se puede asumir sin pérdida de generalidad, que $v_n \rightharpoonup v_0$ en $E_0^{\alpha,p}$. Así $v_n \to v_0$ en $L^p([0,\Lambda])$ y en $L^{q+1}([0,\Lambda])$, ya que $1 < q < p-1$. Como $u_n \in N_\lambda^+$,

$$\int_{[0,\Lambda]} b|v_n|^{q+1} dx = \frac{1}{\|u_n\|^{q+1}} \int_{[0,\Lambda]} b|u_n|^{q+1} dx > 0,$$

luego;

$$\int_{[0,\Lambda]} b|v_0|^{q+1} dx \geqslant 0. \tag{3.59}$$

Además, $u_n \in N_\lambda^+ \subseteq N_\lambda$, así que por (3.43), se tiene

$$\int_{[0,\Lambda]} (|\,_0D_x^\alpha u_n|^p - \lambda |u_n|^p)\, dx = \int_{[0,\Lambda]} b|u_n|^{q+1} dx \tag{3.60}$$

y al dividir (3.60) por $\|u_n\|^p$, sigue

$$\int_{[0,\Lambda]} \left(\frac{|\,_0D_x^\alpha u_n|^p}{\|u_n\|^p} - \lambda \frac{|u_n|^p}{\|u_n\|^p} \right) dx = \int_{[0,\Lambda]} b \frac{|u_n|^{q+1}}{\|u_n\|^{q+1}} \frac{\|u_n\|^{q+1}}{\|u_n\|^p} dx$$

entonces

$$\int_{[0,\Lambda]} (|\,_0D_x^\alpha v_n|^p - \lambda |v_n|^p)\, dx = \int_{[0,\Lambda]} b|v_n|^{q+1} \frac{1}{\|u_n\|^{p-(q+1)}} dx \to 0$$

en $L^p([0,\Lambda])$ dado que $b|v_n|^{q+1}$ es acotado en $L^{q+1}([0,\Lambda])$ y $\|u_n\|^{p-(q+1)} \to \infty$.
Ahora supongamos que $v_n \nrightarrow v_0$ en $E_0^{\alpha,p}$. Por (2.6) se tiene

$$\int_{[0,\Lambda]} |\,_0D_x^\alpha v_0|^p dx < \liminf_{n\to\infty} \int_{[0,\Lambda]} |\,_0D_x^\alpha v_n|^p,$$

luego,

$$\int_{[0,\Lambda]} (|\,_0D_x^\alpha v_0|^p - \lambda |v_0|^p)\, dx < \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\Lambda]} (|\,_0D_x^\alpha v_n|^p - \lambda |v_n|^p)\, dx = 0$$

y de esta manera se tiene, $\frac{v_0}{\|v_0\|} \in L_-(\lambda)$.
Sin embargo, la hipótesis del teorema es $L_-(\lambda) \subseteq B_-$ entonces $\frac{v_0}{\|v_0\|} \in B_-$, lo que es una contradicción por (3.59).
Ahora, suponga que $v_n \to v_0$ en $E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])$. Por tanto $\|v_0\| = 1$ y

$$\int_{[0,\Lambda]} (|\,_0D_x^\alpha v_0|^p - \lambda |v_0|^p)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\Lambda]} (|\,_0D_x^\alpha v_n|^p - \lambda |v_n|^p)\, dx = 0.$$

Entonces, $v_0 \in L_0(\lambda)$ y por la parte (i), $L_0(\lambda) \subseteq B_-$, se obtiene que $v_0 \in B_-$, lo cual es nuevamente una contradicción por (3.59). Por lo tanto, N_λ^+ es acotado.

3. Suponga que $0 \in \overline{N_\lambda^-}$. Entonces existe $\{u_n\} \subseteq N_\lambda^-$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.
Sea $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$, luego por el teorema 2.19 se puede asumir sin pérdida de generalidad, que $v_n \rightharpoonup v_0$ en $E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])$ entonces $v_n \to v_0$ en $L^p([0,\Lambda])$.
Como $u_n \in N_\lambda^- \subseteq N_\lambda$, por (3.43), se tiene

$$\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha u_n|^p - \lambda |u_n|^p)\,dx = \int_{[0,\Lambda]} b|u_n|^{q+1}dx < 0 \tag{3.61}$$

y multiplicando por $\|u_n\|^{-p}$, se obtiene que

$$\int_{[0,\Lambda]} \left(\frac{|\,{}_0D_x^\alpha u_n|^p}{\|u_n\|^p} - \lambda \frac{|u_n|^p}{\|u_n\|^p} \right) dx = \int_{[0,\Lambda]} b \frac{|u_n|^{q+1}}{\|u_n\|^{q+1}} \frac{\|u_n\|^{q+1}}{\|u_n\|^p} dx$$

luego

$$\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha v_n|^p - \lambda |v_n|^p)\,dx = \frac{1}{\|u_n\|^{p-(q+1)}} \int_{[0,\Lambda]} b|v_n|^{q+1}dx$$

por lo tanto

$$\|u_n\|^{p-(q+1)} \int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha v_n|^p - \lambda |v_n|^p)\,dx = \int_{[0,\Lambda]} b|v_n|^{q+1}dx \leqslant 0. \tag{3.62}$$

Se sabe que $\{v_n\}$ es acotada en $E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])$, la función b es regular en $[0,\Lambda]$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\| = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\Lambda]} b|v_n|^{q+1}dx = 0 \tag{3.63}$$

y por ende

$$\int_{[0,\Lambda]} b|v_0|^{q+1}dx = 0, \tag{3.64}$$

dado que $b|v_n|^{q+1}$ es acotado en $[0,\Lambda]$ y $\|u_n\|^{p-(q+1)} \to \infty$.
Ahora, supongamos que $v_n \to v_0$ en $E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])$, entonces $\|v_0\| = 1$ y

$$\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha v_0|^p - \lambda |v_0|^p)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^\alpha v_n|^p - \lambda |v_n|^p)\,dx \leqslant 0,$$

por lo tanto $v_0 \in L_0(\lambda)$ ó $v_0 \in L_-(\lambda)$. Sin embargo, por hipótesis del teorema $L_-(\lambda) \in B_-$ y por (i) se sigue que $L_0(\lambda) \subseteq B_-$. En ambos casos se tendría $v_0 \in B_-$ lo cual contradice a (3.64).
Luego, si $v_n \nrightarrow v_0$ en $E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])$, entonces por (2.6) se sigue que

$$\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha v_0|^p dx < \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha v_n|^p dx.$$

Además, se sabe que $\{v_n\}$ es acotada en $E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])$ y por el teorema de la Convergencia Dominada (2.5)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\Lambda]} |v_n|^p dx = \int_{[0,\Lambda]} \lim_{n\to\infty} |v_n|^p dx \tag{3.65}$$

entonces

$$\int_{[0,\Lambda]} (|\,_0D_x^{\alpha} v_0|^p - \lambda |v_0|^p)\,dx < \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\Lambda]} (|\,_0D_x^{\alpha} v_n|^p - \lambda |v_n|^p)\,dx \leqslant 0.$$

Por lo tanto, $\frac{v_0}{\|v_0\|} \in L_-(\lambda) \cap B_0$ lo cual es nuevamente una contradicción, dado que $L_-(\lambda) \subseteq B_-$ y tambień en $B_- \cap B_0 = \emptyset$. Entonces se concluye que $0 \notin \overline{N_\lambda^-}$.

Ahora sigue la demostración de $\overline{N_\lambda^-}$ es cerrado y para ello se debe probar que $\overline{N_\lambda^-} \subset N_\lambda^-$. En efecto, sea $\{u_n\} \subseteq N_\lambda^-$, luego existe $\{u_n\} \in \overline{N_\lambda^-}$ tal que $u_n \to u$ en $E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])$. Entonces $u \in \overline{N_\lambda^-}$ y como vimos anteriormente, u no puede ser idénticamente nula, es decir $u \neq 0$. Entonces, se tiene el siguiente resultado

$$\int_{[0,\Lambda]} (|\,_0D_x^{\alpha} u|^p - \lambda |u|^p)\,dx = \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx \leq 0. \tag{3.66}$$

Si ambas integrales son iguales a 0, entonces $\frac{u}{\|u\|} \in L_0(\lambda) \cap B_0$, lo cual contradice (i) del teorema 3.3. Por lo tanto, de (3.66) se deduce que ambas integrales deben ser negativas, y en consecuencia $u \in N_\lambda^-$. Así, se concluye que N_λ^- es cerrado.

4. Supongamos que existe $u \in \overline{N_\lambda^+} \cap N_\lambda^-$. Como $u \in N_\lambda^-$, por (iii), se tiene que u no es idénticamente nula en consecuencia

$$\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx < 0$$

Además, dado que $u \in \overline{N_\lambda^+}$ entonces

$$\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx \geq 0$$

lo cual es imposible. Se concluye que $\overline{N_\lambda^+} \cap N_\lambda^- = \emptyset$.

■

Teorema 3.6

Suponga que existe $\hat{\lambda}$ tal que, para todo $\lambda < \hat{\lambda}$, $L_-(\lambda) \subseteq B_-$. Entonces, $\forall \lambda < \hat{\lambda}$, se cumple que (hipótesis del teorema 3.3);

(i) J_λ es acotado inferiormente en N_λ^+

(ii) $\inf_{u \in N_\lambda^-} J_\lambda(u) > 0$, lo que demuestra que N_λ^- es no vacío.

Demostración. (i) La prueba de (i) es una consecuencia inmediata de la acotación de N_λ^+ (de (ii) del teorema 3.3)

(ii) Observe que $J_\lambda(u) \geq 0$ para $u \in N_\lambda^-$. En efecto, si $u \in N_\lambda^-$ entonces $u \in N_\lambda$ y

$$J_\lambda(u) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q+1}\right) \int_{[0,\Lambda]} (|\,_0D_x^{\alpha} u|^p - \lambda |u|^p) dx = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q+1}\right) \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1} dx \geq 0. \tag{3.67}$$

Suponga que $\inf_{u\in N_\lambda^-} J_\lambda(u)=0$. Entonces existe $\{u_n\}\subseteq N_\lambda^-$ tal que $\lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n)=0$. Por (3.43), vea que

$$\begin{aligned}\int_{[0,\Lambda]}(|{}_0D_x^\alpha u_n|^p-\lambda|{}_0D_x^\alpha u_n|^p)dx\to 0\\ \int_{[0,\Lambda]} b|u_0|^{q+1}dx=\int_{[0,\Lambda]} b|u_n|^{q+1}dx\to 0\end{aligned}\tag{3.68}$$

cuando $n\to\infty$.

Sea $v_n=\frac{u_n}{\|u_n\|}$. Como vimos anteriormente $0\notin\overline{N_\lambda^-}$; luego $\{\|u_n\|\}$ es acotada lejos de 0, esto es, existe $c>0$ tal que $\|u_n\|>c$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\Lambda]}(|{}_0D_x^\alpha v_n|^p-\lambda|{}_0D_x^\alpha v_n|^p)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\|u_n\|^p}\int_{[0,\Lambda]}(|{}_0D_x^\alpha u_n|^p-\lambda|{}_0D_x^\alpha u_n|^p)dx=0$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\Lambda]} b|v_n|^{q+1}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\|u_n\|^p}\int_{[0,\Lambda]} b|u_n|^{q+1}dx=0.$$

Siendo v_n acotada, por el teorema 2.19 se puede suponer sin pérdida de generalidad que $v_n\rightharpoonup v_0$ en $E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])$. Entonces, $v_n\to v_0$ en $L^p([0,\Lambda])$ y en $L^{q+1}([0,\Lambda])$. Como la función b es una función regular en $[0,\Lambda]$, usando el teorema de Convergencia Dominada 2.5 se concluye que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\Lambda]} b|v_n|^{q+1}dx=\int_{[0,\Lambda]} b\lim_{n\to\infty}|v_n|^{q+1}dx=\int_{[0,\Lambda]} b|v_0|^{q+1}dx=0.$$

Luego, $\int_{[0,\Lambda]} b|v_0|^{q+1}dx=0$, es decir, $v_0\in B_0$. Si $v_n\to v_0$ en $E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])$, entonces $\|v_0\|=1$ y

$$\int_{[0,\Lambda]}(|{}_0D_x^\alpha v_0|^p-\lambda|{}_0D_x^\alpha v_0|^p)dx=0$$

esto es, $v_0\in L_0(\lambda)$. Sin embargo, si $v_n\nrightarrow v_0$ en $E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])$, se tiene

$$\int_{[0,\Lambda]}(|{}_0D_x^\alpha v_0(x)|^p-\lambda|{}_0D_x^\alpha v_0|^p)dx<0$$

esto es, $\frac{v_0}{\|v_0\|}\in L_-(\lambda)$. Entonces en ambos casos $\frac{v_0}{\|v_0\|}\in B_0$ lo cual es una contradicción, pues como se sabe $L_-(\lambda)\subseteq B_-$ y $L_0(\lambda)\cap B_0=\emptyset$. Por lo tanto,

$$\inf_{u\in N_\lambda^-} J_\lambda(u)>0$$

■

3.4 Existencia de solución débil del problema estacionario

En esta sección se demuestra que existe un punto minimizador en $N_\lambda^+(N_\lambda^-)$ el cual es un punto crítico de $J_\lambda(u)$ y en consecuencia es solución no trivial del problema estacionario P_0.

Teorema 3.7

Suponga que $L_{-}(\lambda) \subseteq B_{-}(\lambda)$ para todo $\lambda < \hat{\lambda}$; entonces $\forall \lambda < \hat{\lambda}$

(i) Existe un punto minimizante para J_λ en N_λ^+

(ii) Existe un punto minimizante para J_λ en N_λ^- siempre que $L_{-}(\lambda)$ es no vacío.

Demostración. (i) Por el teorema 3.6, se tiene que J_λ es acotado inferiormente en N_λ^+. Por la definición de ínfimo, existe una sucesión minimizante $\{u_n\} \subseteq N_\lambda^+$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u\in N_\lambda^+} J_\lambda(u) < 0. \tag{3.69}$$

Usando (3.42), se tiene

$$J_\lambda(u_n) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q+1}\right) \int_{[0,\Lambda]} b|u_n|^{q+1},$$

con $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q+1}\right) < 0$ y $\int_{[0,\Lambda]} b|v_0|^{q+1}dx > 0$ para todo n, se tiene que $J_\lambda(u_n) < 0$.
Además, según (ii) del teorema 3.6, N_λ^+ es acotado, por lo que se puede suponer que $u_n \rightharpoonup u_0$ en $E_0^{\alpha,p}$ y por el teorema 2.19, $u_n \to u_0$ en $L^{q+1}([0,\Lambda])$. Por lo tanto, se deduce que

$$\int_{[0,\Lambda]} b|u_0|^{q+1}dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\Lambda]} b|u_n|^{q+1}dx > 0 \tag{3.70}$$

y $\dfrac{u_0}{\|u_0\|} \in B_+$.
Por el teorema 3.3, $L_0(\lambda) \subseteq B_-$, $L_-(\lambda) \subseteq B_-$ y tenemos también que $B_- \cap B_+ = \emptyset$. Así, $\dfrac{u_0}{\|u_0\|} \in L_+(\lambda) \cap B_+$ y por resultados anteriores obtenemos que la función de fibrado ϕ_{u_0} tiene un único mínimo en t_{u_0} tal que $t_{u_0}u_0 \in N_\lambda^+$.
Se debe demostrar que u_0 está en la variedad de Nehari. Para ello, suponga que $u_n \nrightarrow u_0$ en $E_0^{\alpha,p}$, por tanto

$$t_{u_0} = \left[\frac{\int_{[0,\Lambda]} b|u_0|^{q+1}dx}{\int_{[0,\Lambda]}(|\,_0D_x^\alpha u_0|^p - \lambda|u_0|^p)dx}\right]^{\frac{1}{p-(q+1)}} > 1$$

además,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_0) &= \int_{[0,\Lambda]}(|\,_0D_x^\alpha u_0|^p - \lambda|\,_0D_x^\alpha u_0|^p)dx - \int_{[0,\Lambda]} b|u_0|^{q+1}dx \\ &< \lim_{n\to\infty}\int_{[0,\Lambda]}(|\,_0D_x^\alpha u_n|^p - \lambda|\,_0D_x^\alpha u_n|^p)dx - \int_{[0,\Lambda]} b|u_n|^{q+1}dx \\ &= \lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n). \end{aligned} \tag{3.71}$$

Como ϕ_{u_0} tiene un único mínimo en t_{u_0} tal que $t_{u_0}u_0 \in N_\lambda^+$, se sigue que

$$\phi_{u_0}(t_{u_0}) = J_\lambda(t_{u_0}u_0) < \phi_{u_0}(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+,$$

en particular vale la desigualdad para $t=1$,

$$J_\lambda(t_{u_0}u_0) < J_\lambda(u_0). \tag{3.72}$$

Luego por (3.71) y (3.72), se tiene que

$$J_\lambda(t_{u_0}u_0) < J_\lambda(u_0) < \lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u\in N_\lambda^+} J_\lambda(u)$$

lo cual es imposible, dado que $t_{u_0}u_0 \in N_\lambda^+$.
Por lo tanto $u_n \to u_0$ en $E_0^{\alpha,p}$ y así $u_0 \in N_\lambda^+$. Sigue que u_0 es minimizador para J_λ en N_λ^+.

Por otro lado $J_\lambda(u) = J_\lambda(|u|)$ (2.2) y se puede asumir que u_0 es no negativo en $[0,\Lambda]$. Por lo tanto $J_\lambda(u_0) < 0,\ u_0$ es un mínimo local para J_λ en N_λ^+. Sigue del Lema 3.4 que u_0 es un punto crítico de J_λ y así es una solución débil del problema P_0.

(ii) Sea $\{u_n\} \subseteq N_\lambda^-$ una sucesión minimizante para J_λ en N_λ^-. Luego de el teorema 3.6, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u\in N_\lambda^-} J_\lambda(u) > 0.$$

Suponga que $\{u_n\}$ es no acotada; de modo que, $\|u_n\| \to \infty$, cuando $n \to \infty$.
Considere $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$. Siendo, $\{J_\lambda(u_n)\}$ acotada, sigue que

$$\left\{\int_{[0,\Lambda]} (|{}_0D_x^\alpha u_n|^p - \lambda |u_n|^p)dx\right\} \text{ y } \left\{\int_{[0,\Lambda]} (b|u_n|^{q+1})dx\right\}$$

son acotadas y por esto

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\Lambda]} (|{}_0D_x^\alpha v_n|^p - \lambda |v_n|^p)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_{[0,\Lambda]} b|v_n|^{q+1}dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\|u_n\|^p}\int_{[0,\Lambda]} b|u_n|^{q+1}dx\\ &= 0.\end{aligned}$$

Como $\{v_n\}$ es acotada, se puede asumir que $v_n \rightharpoonup v_0$ en $E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])$ y $v_n \to v_0$ en $L^p([0,\Lambda])$ y en $L^{q+1}([0,\Lambda])$, de modo que

$$\int_{[0,\Lambda]} b(x)|v_0(x)|^{q+1}dx = 0.$$

Si $v_n \to v_0$ en $E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])$, se ve que $v_0 \in L_0(\lambda)\cap B_0$ lo cual es imposible; por la parte (i) del teorema 3.3.
De allí $v_n \nrightarrow v_0$ en $E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])$ y así por 2.6, se tiene que

$$\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^{\alpha} v_0|^p - \lambda |v_0|^p) dx < \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^{\alpha} v_n|^p - \lambda |v_n|^p dx = 0.$$

Por lo tanto, $v_0 \neq 0$ y $\dfrac{v_0}{\|v_0\|} \in L_-(\lambda) \cap B_0$, lo cual es nuevamente imposible.
Así $\{u_n\}$ es acotada y por esto se puede asumir que $u_n \rightharpoonup u_0$ en $E_0^{\alpha,p}$ y $u_n \to u_0$ en $L^p([0,\Lambda])$ y en $L^{q+1}([0,\Lambda])$.
Suponga que $u_n \nrightarrow u_0$ en $E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])$. Entonces se tiene

$$\int_{[0,\Lambda]} b|u_0|^{q+1} dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\Lambda]} b|u_n|^{q+1} dx = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q+1}\right)^{-1} \lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) < 0;$$

y

$$\begin{aligned}\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^{\alpha} u_0|^p - \lambda |u_0|^p) dx &< \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^{\alpha} u_n|^p - \lambda |u_n|^p) dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\Lambda]} b|u_n|^{q+1} dx = \int b|u_0|^{q+1} dx < 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dfrac{v\ \ 0}{\|v_0\|} \in L_-(\lambda) \cap B_-(\lambda)$ y asi $t_{u_0} u_0 \in N_\lambda^-$, donde

$$t_{u_0} = \left[\frac{\int_{[0,\Lambda]} b|u_0|^{q+1} dx}{\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x^{\alpha} u_0|^p - \lambda |u_0|^p) dx}\right]^{\frac{1}{p-(q+1)}} < 1$$

Además, $t_{u_0} u_n \rightharpoonup t_{u_0} u_0$, pero $t_{u_0} u_n \nrightarrow t_{u_0} u_0$ en $E_0^{\alpha,p}$, luego,

$$J_\lambda(t_{u_0} u_0) < \lim_{n\to\infty} J_\lambda(t_{u_0} u_n)$$

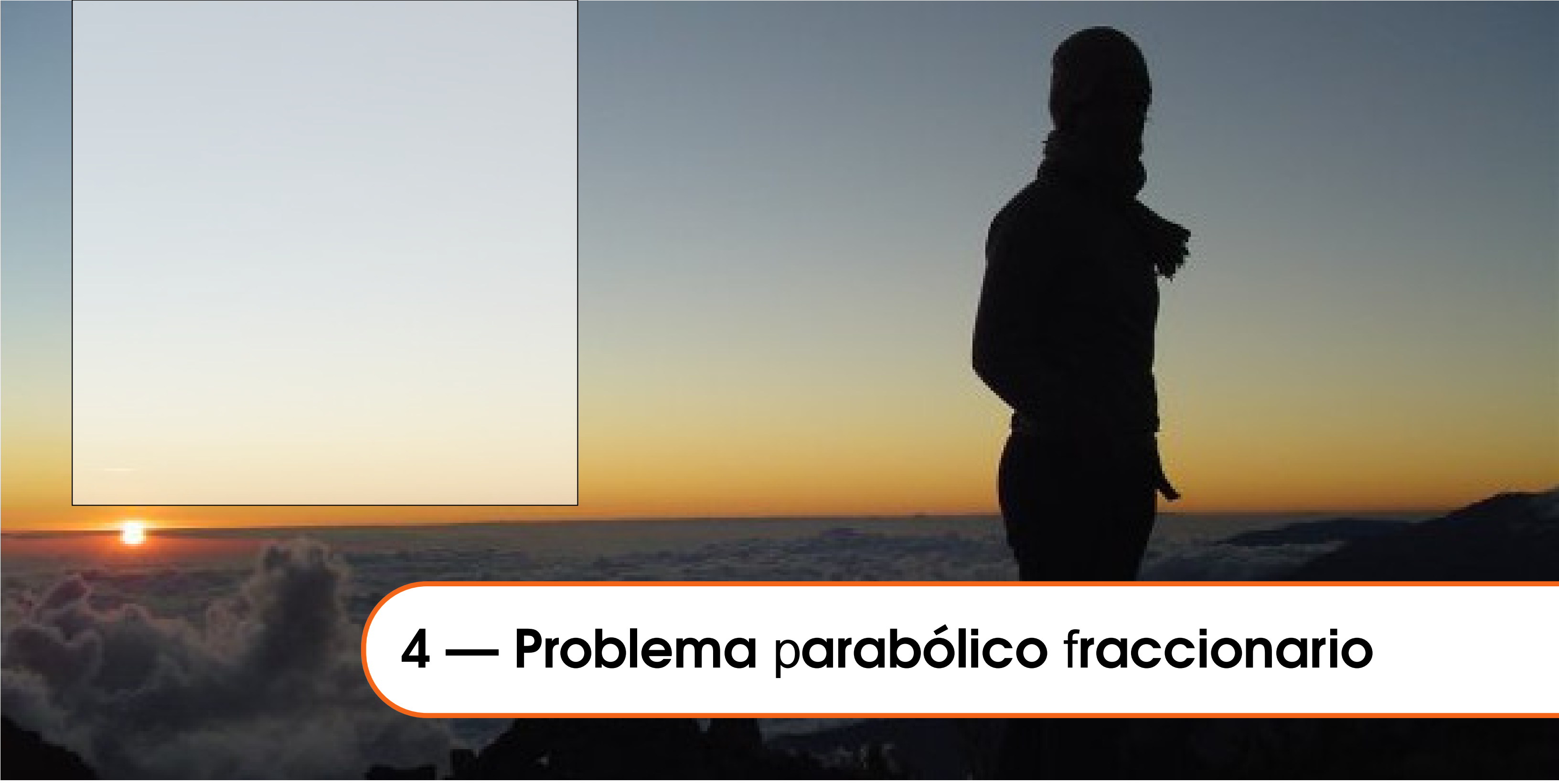
Como el operador $t \to J_\lambda(t(u_n))$, alcanza su máximo en $t = 1$

$$\lim_{n\to\infty} J_\lambda(t_{u_0} u_0) \leq \lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u\in N_\lambda^-} J_\lambda(u)$$

Por lo tanto, $J_\lambda(t_{u_0} u_0) < \inf_{u\in N_\lambda^-} J_\lambda(u)$, lo cual es una contradicción.
En ese sentido, $u_n \to u_0$ en $E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$ y se sigue que u_0 es un punto minimizador para $J_\lambda(u)$ en N_λ^-.

Dado que $J_\lambda(u) = J_\lambda(|u|)$ (2.2), se puede asumir que u_0 es no negativo en $[0,\Lambda]$. Dado que N_λ^- es cerrado u_0 es un punto mínimo local para J_λ en N_λ.
Se sigue del Lema 3.4 que u_0 es un punto crítico de J_λ, y así es una solución débil del problema P_0.

■



4 — Problema parabólico fraccionario

En este capítulo, se demuestra la existencia de solución débil para el problema parabólico con derivadas fraccionarias P_1. Se presenta notaciones básicas, definiciones, y resultados preliminares que se utilizarán a lo largo del capítulo.

Lema 4.1 ([26]) Suponga que $y \in C[0,T],\ T > 0$ y $1 < \alpha < 2$, entonces el problema

$$D^{\alpha}u(t) = y(t) \ \ , \ \ t \in [0,T] \tag{4.1}$$

tiene una única solución

$$u(t) = u_0 + u'(0)\mathrm{t} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)ds \tag{4.2}$$

Por la definición 2.12, el teorema 2.13 y el Lema 4.1, se puede escribir el problema P_1 como una ecuación integral.

Teorema 4.1

Sea $1 < \beta < 2$ y $\lceil \beta \rceil = n$. Una función $u \in C[0,T]$ es solución del problema P_1 si y solo si, es solución de la ecuación integral

$$E_1 \begin{cases} u(x,t) = \phi(x) + \psi(x)t + \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\left(-\, {}_xD_{\Lambda}^{\alpha}(|\, {}_0D_x^{\alpha}u(x,s)|^{p-2}\, {}_0D_x^{\alpha}u(x,s))\right. \\ \qquad\qquad \left. + \lambda|u(x,s)|^{p-2}u(x,s) + b(x)|u(x,s)|^{q-1}u(x,s)\right)ds, \ \ \forall (x,t) \in \Omega_T \\ u(0,t) = u(\Lambda,t) = 0 \ \ , \quad \text{para todo } t \text{ en } \Omega = [0,T] \end{cases}$$

Definición 4.1
Sea $F : [0,\Lambda] \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(x,u(x)) = -\,{}_xD_\Lambda^\alpha(|\,{}_0D_x^\alpha u(x,s)|^{p-2}\,{}_0D_x^\alpha u(x,s)) + \lambda|u(x,s)|^{p-2}u(x,s) + b(x)|u(x,s)|^{q-1}u(x,s).$$

una función contínua en un recinto plano $G \subset [0,\Lambda] \times [0,T]$ que contiene a $u(x,0) = \phi(x)$ y verifica la condición de Lipschitz respecto a t:

$$|F(x,t_1) - F(x,t_2)| \leq M|t_1 - t_2|$$

Demostración. (del teorema 4.1)
$\Longrightarrow$] Sea la función contínua $F(u) : [0,\Lambda] \times [0,T] \to \mathbb{R}$ con

$$F(x,u(x)) = -\,{}_xD_\Lambda^\alpha(|\,{}_0D_x^\alpha u(x,s)|^{p-2}\,{}_0D_x^\alpha u(x,s)) + \lambda|u(x,s)|^{p-2}u(x,s) + b(x)|u(x,s)|^{q-1}u(x,s). \tag{4.3}$$

Del problema P_1 se tiene la ecuación

$${}_0^CD_t^\beta u = F(u) \tag{4.4}$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$u(x,0) = \phi(x) \text{ y } u_t(x,0) = \psi(x), \text{ con } x \in [0,\Lambda] \tag{4.5}$$

Aplicando integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden β por izquierda a (4.4),

$${}_0I_t^\beta(\,{}_0^CD_t^\beta u) \;=\; {}_0I_t^\beta(F(u)) \tag{4.6}$$

luego dado que $1 < \beta < 2$ el valor de $n = 2$ y de la propiedad (2.19) se tiene que

$$\begin{aligned} u(t) - \sum_{k=0}^{1} \frac{u^{(k)}(0)}{k!}(t-0)^k &= {}_0I_t^\beta(F(u)), \;\; t \in [0,T] \\ u(t) - u(0) - u'(0)t &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}F(u)ds, \end{aligned} \tag{4.7}$$

luego reemplazando las condiciones (4.5),

$$u(t) - \phi(x) - \psi(x)t = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}F(u)ds,$$

se obtiene la ecuación integral E_1.

$\Longleftarrow$] En la ecuación integral E_1, se aplica derivada fraccionaria de Caputo de orden β

$$u(x,t) = \phi(x) + \psi(x)t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}F(u)ds$$

$${}_0^C D_t^\beta u(x,t) = {}_0^C D_t^\beta \phi(x) + {}_0^C D_t^\beta \psi(x)t + {}_0^C D_t^\beta ({}_0I_t^\beta F(u)),$$

luego con la propiedad (1.6) y (1.9), se sigue que,

$${}_0^C D_t^\beta u(x,t) = 0 + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{2-\alpha-1}t^{(2)}ds + {}_0^C D_t^\beta ({}_0I_t^\beta F(u))$$

$${}_0^C D_t^\beta u(x,t) = F(u(x,t)).$$

Para obtener las condiciones iniciales se considera $t=0$ en $u(x,t)$ de la ecuación E_1

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= \phi(x) + \psi(x)0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^0 (0-s)^{\beta-1}F(u)ds \\
u(x,0) &= \phi(x), \text{ derivando } u(x,t) \text{ y reemplazando } t=0 \\
u_t(x,0) &= \psi(x) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^0 (0-s)^{\beta-1}F(u)ds \\
u_t(x,0) &= \psi(x)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

se tiene el problema P_1. ■

Definición 4.2

Se dice que $u \in C([0,T]; E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda])$, $T>0$ es una solución débil de la ecuación diferencial de orden fraccionario P_1, si

$$\int_{[0,\Lambda]} (u - \Phi(u))vdx = 0, \ \forall t \in [0,T], \text{ para cada } v \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda].$$

Esto es:

$$\int_{[0,\Lambda]} uvdx = \int_{[0,\Lambda]} \Big[\phi(x) + \psi(x)t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}(-{}_xD_\Lambda^\alpha(|{}_0D_x^\alpha u(x,s)|^{p-2}\,{}_0D_x^\alpha u(x,s)) + \lambda|u(x,s)|^{p-2}u(x,s) + b(x)|u(x,s)|^{q-1}u(x,s))ds\Big]\, vdx$$

Definición 4.3

[28] Dado dos espacios normados X e Y. Se dice que un operador $A \in \mathscr{L}(X;Y)$ es compacto o completamente contínuo si para cualquier sucesión acotada x_n en X, la sucesión Ax_n en Y posee una subcesión convergente.

Lema 4.2 Sea $b \in L^{\infty}[0,\Lambda]$, entonces el operador

$$\Phi(u) : E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda] \to E^{\alpha,p}[0,\Lambda]$$

es completamente contínuo.

Demostración. En efecto, sea

$$F(u) = -\,{}_xD_\Lambda^\alpha(|\,{}_0D_x^\alpha u(x,s)|^{p-2}\,{}_0D_x^\alpha u(x,s)) + \lambda|u(x,s)|^{p-2}u(x,s) + b(x)|u(x,s)|^{q-1}u(x,s)$$

Luego, se puede escribir

$$\Phi(u) = \phi(x) + \psi(x)t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}F(u)ds \tag{4.9}$$

Para cada $v \in E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])$ y $\|v\|_{E_0^{\alpha,p}} = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle F(u),v\rangle = \int_{[0,\Lambda]} &(-|\,{}_0D_x^\alpha u(x,s)|^{p-2}\,{}_0D_x^\alpha u(x,s)\,{}_0D_x^\alpha v(x,s) + \lambda|u(x,s)|^{p-2}u(x,s)v(x,s)\\ &+ b(x)|u(x,s)|^{q-1}u(x,s)v(x,s))dx, \ \ Para \ \ cada \ \ v \in E_0^{\alpha,p}\end{aligned}$$

Considere por simplicidad de escritura que $u(x,s) = u$, $v(x,s) = v$, $b(x) = b$

$$|\langle F(u),v\rangle| = \left|\int_{[0,\Lambda]} (-|\,{}_0D_x u|^{p-2}\,{}_0D_x u\,{}_0D_x^\alpha v + \lambda|u|^{p-2}uv + b|u|^{q-1}uv)dx\right| \tag{4.10}$$

Teniendo en cuenta que, por el Lema 3.4, se sabe que $r(u) = \langle J_\lambda'(u),u\rangle = 0$, es decir

$$\int_{[0,\Lambda]} (|\,{}_0D_x u|^p)dx = \int_{[0,\Lambda]} \lambda|u|^p dx + \int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1}dx$$

Además, $E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda] \hookrightarrow L^p[0,\Lambda]$, se tiene la desigualdad de Poincaré, $\|u\|_{L^p[0,\Lambda]} \leq \frac{\Lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|{}_0D_t^\alpha u\|_{L^p[0,\Lambda]}$, recuerde que $\|{}_0D_t^\alpha u\|_{L^p[0,\Lambda]} = \|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}$ entonces $\|u\|_{L^p[0,\Lambda]} \leq \frac{\Lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}$, por lo que

$$\int_{[0,\Lambda]} \lambda|u|^p dx \leq |\lambda|\int_{[0,\Lambda]} |u|^p dx = |\lambda|\|u\|_{L^p[0,\Lambda]}^p \leq |\lambda|\frac{\Lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|u\|_{E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]}^p.$$

Además por (3.20) y (2.7) , se tiene

$$\int_{[0,\Lambda]} b|u|^{q+1}dx \leq \|b\|_{L^\infty([0,\Lambda])}\frac{\Lambda^{1-(q+1)/p+\alpha(q+1)}}{\Gamma(\alpha+1)^{q+1}}\|u\|_{\alpha,p}^{q+1}.$$

Sea $S = \frac{\Lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ y $C = \frac{\Lambda^{1-(q+1)/p+\alpha(q+1)}}{\Gamma(\alpha+1)^{q+1}}$, así,

$$\begin{aligned}
\|u\|^p_{E_0^{\alpha,p}} &\leq |\lambda| S^p \|u\|^p_{E_0^{\alpha,p}} + \|b\|_{L^\infty[0,\Lambda]} C^{q+1} \|u\|^{q+1}_{E_0^{\alpha,p}} \\
\|u\|^p_{E_0^{\alpha,p}} - |\lambda| S^p \|u\|^p_{E_0^{\alpha,p}} &\leq \|b\|_{L^\infty[0,\Lambda]} C^{q+1} \|u\|^{q+1}_{E_0^{\alpha,p}} \\
\|u\|^p_{E_0^{\alpha,p}} (1 - |\lambda| S^p) &\leq \|b\|_{L^\infty[0,\Lambda]} C^{q+1} \|u\|^{q+1}_{E_0^{\alpha,p}} \\
\frac{\|u\|^p_{E_0^{\alpha,p}}}{\|u\|^{q+1}_{E_0^{\alpha,p}}} &\leq \frac{\|b\|_{L^\infty[0,\Lambda]} C^{q+1}}{(1 - |\lambda| S^p)} \\
\|u\|^{p-(q+1)}_{E_0^{\alpha,p}} &\leq \frac{\|b\|_{L^\infty[0,\Lambda]} C^{q+1}}{(1 - |\lambda| S^p)}
\end{aligned}$$

$$\|u\|_{E_0^{\alpha,p}} \leq \left(\frac{\|b\|_{L^\infty([0,\Lambda])} C^{q+1}}{(1 - |\lambda| S^p)} \right)^{\frac{1}{(p-(q+1))}} \tag{4.11}$$

Ahora siguiendo nuevamente con (4.10) se tiene que

$$\begin{aligned}
|\langle F(u), v \rangle| &= \left| \int_{[0,\Lambda]} (-|\,{}_0D_x^\alpha u|^{p-2}\,{}_0D_x^\alpha u\,{}_0D_x^\alpha v + \lambda |u|^{p-2} uv + b|u|^{q-1} uv) dx \right| \\
&\leq \left| \int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha u|^{p-1}\,{}_0D_x^\alpha v dx \right| + \left| \int_{[0,\Lambda]} \lambda |u|^{p-1} v dx \right| + \left| \int_{[0,\Lambda]} b|u|^q v dx \right|
\end{aligned} \tag{4.12}$$

luego por (2.28), (4.11) y la desigualdad de Hölder (2.5), se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha u|^{p-1}\,{}_0D_x^\alpha v dx &\leq \left(\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha u|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{[0,\Lambda]} |\,{}_0D_x^\alpha v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|\,{}_0D_x^\alpha u\|^{p-1}_{L^p} \|\,{}_0D_x^\alpha v\|_{L^p} = \|u\|^{p-1}_{\alpha,p} \|v\|_{\alpha,p}.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\Lambda]} |u|^{p-1} v dx &\leq \left(\int_{[0,\Lambda]} |u|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{[0,\Lambda]} |v|^p dx \right)^{1/p} \\
&= \|u\|^{p-1}_{L^p} \|v\|_{L^p} \leq \left(\frac{\Lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right)^{p-1} \|u\|^{p-1}_{E_0^{\alpha,p}} \left(\frac{\Lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \|v\|_{E_0^{\alpha,p}}. \\
&= \left(\frac{\Lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right)^p \|u\|^{p-1}_{\alpha,p} \|v\|_{\alpha,p} = S^p \|u\|^{p-1}_{E_0^{\alpha,p}} \|v\|_{E_0^{\alpha,p}}
\end{aligned}$$

Y

$$
\begin{aligned}
\int_{[0,\Lambda]} b|u|^q v dx &\le \|b\|_{L^\infty[0,\Lambda]} \left(\int_{[0,\Lambda]} |u|^{q\frac{p}{q}} dx\right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_{[0,\Lambda]} |v|^{\frac{p}{p-q}} dx\right)^{\frac{p-q}{p}} \\
&\le \|b\|_{L^\infty[0,\Lambda]} \|u\|_{L^p}^q \left(\int_{[0,\Lambda]} |1|^{\frac{p-q}{p-q-1}} dx\right)^{\frac{p-q-1}{p-q}} \left(\int_{[0,\Lambda]} |v|^{\frac{p}{p-q}(p-q)} dx\right)^{\frac{1}{p-q}\frac{p-q}{p}\frac{p}{p-q}} \\
&= \|b\|_{L^\infty[0,\Lambda]} \|u\|_{L^p}^q |\Lambda|^{\frac{p-q-1}{p-q}} \|v\|_{L^p}^{\frac{p}{p-q}} \\
&\le \|b\|_{L^\infty[0,\Lambda]} \left(\frac{\Lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^q \|u\|_{E_0^{\alpha,p}}^q |\Lambda|^{\frac{p-q-1}{p-q}} \left(\frac{\Lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{\frac{p}{p-q}} \|v\|_{E_0^{\alpha,p}}^{\frac{p}{p-q}} \\
&\le \|b\|_{L^\infty[0,\Lambda]} \frac{\Lambda^{q\alpha+\frac{p-q-1}{p-q}+\frac{p\alpha}{p-q}}}{\Gamma(\alpha+1)^{q\alpha+\frac{p}{p-q}}} \|u\|_{E_0^{\alpha,p}}^q \|v\|_{E_0^{\alpha,p}}^{\frac{p}{p-q}}.
\end{aligned}
$$

Sustiyendo en (4.12) las estimaciones anteriores y considerando $M_1 = \frac{\Lambda^{q\alpha+\frac{p-q-1}{p-q}+\frac{p\alpha}{p-q}}}{\Gamma(\alpha+1)^{q\alpha+\frac{p}{p-q}}}$, también se sabe que $\|v\|_{E_0^{\alpha,p}} = 1$, y $1 < q < p-1$ y $2 < p < \infty$, entonces se tiene que,

$$
\begin{aligned}
|\langle F(u), v\rangle| &\le \|u\|_{E_0^{\alpha,p}}^{p-1} + |\lambda| S^p \|u\|_{E_0^{\alpha,p}}^{p-1} + \|b\|_{L^\infty([0,\Lambda])} M_1 \|u\|_{E_0^{\alpha,p}}^q \\
|\langle F(u), v\rangle| &\le (1+|\lambda| S^p) \|u\|_{E_0^{\alpha,p}}^{p-1} + \|b\|_{L^\infty([0,\Lambda])} M_1 \|u\|_{E_0^{\alpha,p}}^q \\
|\langle F(u), v\rangle| &\le (1+|\lambda| S^p) \left(\frac{\|b\|_{L^\infty([0,\Lambda])} C^{q+1}}{1-|\lambda| S^p}\right)^{\frac{p-1}{p-(q+1)}} + \|b\|_{L^\infty([0,\Lambda])} M_1 \left(\frac{\|b\|_{L^\infty([0,\Lambda])} C^{q+1}}{1-|\lambda| S^p}\right)^{\frac{q}{p-(q+1)}} = M
\end{aligned}
$$

$$
|\langle F(u), v\rangle| \le M \tag{4.13}
$$

Donde S, C, M_1 son constantes que se obtienen al usar la desigualdad de Poincaré-Friederich (2.26).

Luego,

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(u)\|_{(E_0^{\alpha,p})^*} &= \sup_{\|v\|_{E_0^{\alpha,p}}\leq 1} |\langle \Phi(u),v\rangle| \\
&= \sup_{\|v\|_{E_0^{\alpha,p}}\leq 1} \left| \langle \phi(x),v\rangle + \langle \psi(x),v\rangle t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\langle F(u),v\rangle ds \right| \\
&\leq |\langle \phi(x),v\rangle| + |\langle \psi(x),v\rangle t| + \left| \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\langle F(u),v\rangle ds \right| \\
&\leq \|\phi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])}\|v\|_{\alpha,p} + \|\psi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])}\|v\|_{\alpha,p}T + |\langle F(u),v\rangle| \left| \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1} ds \right| \\
&\leq \|\phi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])} + \|\psi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])}T + \frac{M}{\Gamma(\beta)}\left| \int_0^t (t-s)^{\beta-1} ds \right| \\
&\leq \|\phi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])} + \|\psi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])}T + \frac{M}{\beta\Gamma(\beta)}t^\beta \\
&\leq \|\phi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])} + \|\psi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])}T + \frac{M}{\beta\Gamma(\beta)}T^\beta;
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\Phi(u)$ **es acotado.**

Así también, para cada $v \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda],\ t_1 < t_2;\ t_1,t_2 \in [0,T],\ T > 0$ y $t_2 - t_1 < \delta$, vea que:

$$
\begin{aligned}
\|\Phi u(t_2) - \Phi u(t_1)\| &= \sup_{\|v\|_{E_0^{\alpha,p}}\leq 1} |\langle \Phi u(t_2) - \Phi u(t_1),v\rangle| \\
&= \sup_{\|v\|_{E_0^{\alpha,p}}\leq 1} \Bigg| \langle \psi(x),v\rangle (t_2-t_1) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_2} (t_2-s)^{\beta-1}\langle F(u),v\rangle ds \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_1} (t_1-s)^{\beta-1}\langle F(u),v\rangle ds \Bigg|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\Phi u(t_2) - \Phi u(t_1)\| &\leq \|\psi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])}\|v\|_{E_0^{\alpha,p}}|t_2-t_1| + \frac{1}{\Gamma(\beta)}|\langle F(u),v\rangle| \int_{t_1}^{t_2} |t_2-s|^{\beta-1} ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)}|\langle F(u),v\rangle| \int_0^{t_1} |(t_2-s)^{\beta-1} - (t_1-s)^{\beta-1}| ds \\
&= \|\psi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])}\|v\|_{E_0^{\alpha,p}}|t_2-t_1| + \frac{1}{\Gamma(\beta)}|\langle F(u),v\rangle|(t_2-t_1)^\beta \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)}|\langle F(u),v\rangle| t_2{}^\beta - \frac{1}{\Gamma(\beta)}|\langle F(u),v\rangle|(t_2-t_1)^\beta - \frac{1}{\Gamma(\beta)}|\langle F(u),v\rangle| t_1^\beta \\
&\leq \|\psi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])}|t_2-t_1| + \frac{M}{\beta\Gamma(\beta)}t_2^\beta - \frac{M}{\beta\Gamma(\beta)}t_1^\beta \\
&= \|\psi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])}|t_2-t_1| + \frac{M}{\beta\Gamma(\beta)}(t_2^\beta - t_1^\beta)
\end{aligned}
$$

En lo siguiente, dividimos la prueba en dos casos. Además, para el caso 1 considere

$$\begin{aligned} f : (\delta;1) &\to \mathbb{R} \\ t &\to f(t) = t^{\beta} \end{aligned}$$

Caso 1: $\delta \leq t_1 < t_2 < T$, desde que $1 < \beta \leq 2$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\Phi u(t_2) - \Phi u(t_1)\|_{(E_0^{\alpha,p})^*} &= \sup_{\|v\|_{E_0^{\alpha,p}} \leq 1} |\langle \Phi u(t_2) - \Phi u(t_1), v\rangle| \\
&\leq \|\psi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])}|t_2 - t_1| + \frac{M}{\beta\Gamma(\beta)}(t_2^{\beta} - t_1^{\beta}) \\
& \textit{Con, } t_1 < t < t_2 \textit{ y aplicando el teorema de valor medio} \\
& t_2^{\beta} - t_1^{\beta} = \beta t^{\beta-1}(t_2 - t_1) \\
&= \|\psi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])}|t_2 - t_1| + \frac{M}{\beta\Gamma(\beta)}\beta t^{\beta-1}(t_2 - t_1) \\
&\leq \|\psi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])}|t_2 - t_1| + \frac{M}{\Gamma(\beta)\delta^{1-\beta}}|t_2 - t_1| \\
&= \|\psi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda]}\delta + \frac{M}{\Gamma(\beta)}\delta^{\beta} \\
&= \|\psi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])}\delta^{\beta} + \frac{M}{\Gamma(\beta)}\delta^{\beta} = \left(\|\psi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])} + \frac{M}{\Gamma(\beta)}\right)\delta^{\beta} \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

siempre que,

$$|t_2 - t_1| < \delta = \left\{\left(\|\psi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])} + \frac{M}{\Gamma(\beta)}\right)^{-1}\varepsilon\right\}^{1/\beta},$$

Caso 2: $0 \leq t_1 < \delta,\ t_2 < \beta^{\frac{1}{\beta}}\delta$

$$\begin{aligned}
\|\Phi u(t_2) - \Phi u(t_1)\|_{(E_0^{\alpha,p})^*} &= \sup_{\|v\|_{H_0^1} \leq 1} |\langle \Phi u(t_2) - \Phi u(t_1), v\rangle| \\
&\leq \|\psi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])}|t_2 - t_1| + \frac{M}{\beta\Gamma(\beta)}(t_2^{\beta} - t_1^{\beta}) \\
&\leq \|\psi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])}\delta + \frac{M}{\beta\Gamma(\beta)}(\beta^{\frac{1}{\beta}}\delta)^{\beta} \\
&\leq \|\psi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])} + \frac{M}{\Gamma(\beta)}\delta^{\beta} \\
&= \left(\|\psi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])} + \frac{M}{\Gamma(\beta)}\right)\delta^{\beta} \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ y estableciendo

$$\delta = \left\{ \left(\|\psi(x)\|_{L^\infty([0,\Lambda])} + \frac{M}{\Gamma(\beta)} \right)^{-1} \varepsilon \right\}^{1/\beta},$$

para cada $v \in E_0^{\alpha,p}([0,\Lambda])$, $t_1 < t_2$; $t_1, t_2 \in [0,T]$, $T > 0$ y $t_2 - t_1 < \delta$, se tiene

$$\|\Phi u(t_2) - \Phi u(t_1)\| = \sup_{\|v\|_{E_0^{\alpha,p}} \leq 1} |\langle \Phi u(t_2) - \Phi u(t_1), v \rangle| \leq \varepsilon$$

Por lo tanto, $\Phi(u)$ es equicontinuo.

Por medio del teorema Arzela-Ascoli (teorema 2.7), se tiene que existe una subsucesión $\{\Phi(u_{k_j})\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \{\Phi(u_k)\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$\Phi(u_{k_j}) \to \Phi(u)$$

uniformemente en $E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$.
Por lo tanto $\Phi(u) : E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda] \to E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$ es completamente contínuo. ■

Para usar el teorema de punto fijo de Banach, debemos demostrar que el operador Φ es una contracción.

Lema 4.3 El operador Φ del Lema 4.2 es una contracción.

Demostración. Si u_1 y $u_2 \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$ entonces

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\| &= \max_{t\in[0,\Lambda]} \|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\| \\
&= \max_{t\in[0,\Lambda]} \left| \phi(x) + \psi(x)t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} F(u_1) ds - \phi(x) - \psi(x)t \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} F(u_2) ds \right| \\
&\leq \max_{t\in[0,\Lambda]} \left| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} F(u_1) ds - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} F(u_2) ds \right| \\
&\leq \max_{t\in[0,\Lambda]} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \left| (t-s)^{\beta-1} (F(u_1) - F(u_2)) \right| ds \\
&\leq \max_{t\in[0,\Lambda]} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t |t-s|^{\beta-1} |F(u_1) - F(u_2)| ds \\
&\leq \max_{t\in[0,\Lambda]} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t |t-s|^{\beta-1} k|u_1 - u_2| ds \\
&\leq \frac{k|u_1 - u_2|}{\Gamma(\beta)} \int_0^t |t-s|^{\beta-1} ds \\
&\leq \frac{k|u_1 - u_2|}{\Gamma(\beta)} \frac{T^\beta}{\beta} = \frac{kT^\beta |u_1 - u_2|}{\Gamma(\beta+1)}
\end{aligned}$$

con $h = \frac{kT^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} < 1$, se tiene que $d(\Phi(u_1), \Phi(u_2)) < h|u_1 - u_2|$, por tanto el operador Φ es una contracción ■

Existe solución única

Luego, de la definición 4.1, del Lema 4.2, el teorema del punto fijo de Banach (teorema 2.12), el teorema 4.1, la definición 4.2 **se prueba que el problema parabólico no lineal con derivadas fraccionarias** P_1 **tiene una única solución débil** $u \in C([0,T]; E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda])$.

5 — Conclusiones

En este trabajo se ha resuelto el problema parabólico no lineal con derivadas fraccionarias

$$P_1 \begin{cases} {}_0^cD_t^{\beta} u(x,t) = -\,{}_xD_{\Lambda}^{\alpha}(|\,{}_0D_x^{\alpha}u(x,t)|^{p-2}\,{}_0D_x^{\alpha}u(x,t)) + \lambda|u(x,t)|^{p-2}u(x,t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + b(x)|u(x,t)|^{q-1}u(x,t), \ \ (x,t)\in\Omega_T \\ \quad u(0,t) = u(\Lambda,t) = 0, \ \ t\in[0,T] \\ \quad u(x,0) = \phi(x), \quad \text{en } [0.\Lambda], \\ \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad \text{en } [0,\Lambda], \end{cases}$$

Para resolver este problema se ha usado el método de la variedad de Nehari, conjuntamente con el teorema de punto fijo de Banach, llegando a las siguientes conclusiones.

1. Para resolver el problema P_1 es necesario resolver el problema:

$$P_0 \begin{cases} {}_xD_{\Lambda}^{\alpha}(|\,{}_0D_x^{\alpha}u(x)|^{p-2}\,{}_0D_x^{\alpha}u(x)) = \lambda|u(x)|^{p-2}u(x) + b(x)|u(x)|^{q-1}u(x), \ \ x\in[0,\Lambda] \\ u(0) = u(\Lambda) = 0 \end{cases}$$

2. El problema P_1 tiene solución, si y solo si, el problema integral:

$$E_1 \begin{cases} u(x,t) = \phi(x) + \psi(x)t + \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{\beta-1}(-\,{}_xD_{\Lambda}^{\alpha}(|\,{}_0D_x^{\alpha}u(x,s)|^{p-2}\,{}_0D_x^{\alpha}u(x,s)) \\ \qquad\qquad + \lambda|u(x,s)|^{p-2}u(x,s) + b(x)|u(x,s)|^{q-1}u(x,s))ds, \ \ \forall(x,t)\in\Omega_T \\ u(0,t) = u(\Lambda,t) = 0 \ \ , \quad \text{para todo } t \text{ en } \Omega = [0,T] \end{cases}$$

   Tiene solución como fue demostrado en el teorema 4.1.

3. El problema $P_{\ 1}$ tiene solución débil única en el espacio de Sobolev fraccionario $E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$, bajo las hipótesis de $\lambda < \hat{\lambda} < \lambda_1$, donde λ_1 es el primer autovalor asociado al problema P_0, la región $\Omega_T = [0,\Lambda]\times[0,T]$, las derivadas fraccionarias de Caputo ${}^cD^{\beta}$ y D^{α} de orden $1<\beta<2$ y $\frac{1}{p} < \alpha < 1$ de la variable temporal y espacial respectivamente, donde $1 < q < p-1$, con

$2 < p < \infty$, además se establece las funciones $b,\ \phi\ y\ \psi$ sean contínuas tales que $b : [0,\Lambda] \to \mathbb{R}$, $b \in L^{\infty}[0,\Lambda]$, $\phi(x),\ \psi(x) \in L^{\infty}[0,\Lambda]$ y $u \in E_0^{\alpha,p}[0,\Lambda]$. Condiciones que fueron establecidas también para resolver el problema P_0.

... ...

...

Referencias

[1] Abeliuk, R., Wheater, H. S., *Parameter Identification of Solute Transport Models for Unsaturated Soils,* Journal of Hydrology, 117:199–224, 1990.

[2] Adams, Robert A., Fournier, John J. F., *Sobolev Spaces,* Volumen 140. Elsevier, 2003.

[3] Alves, Claudianor, Romildo N. de Lima*Introdučao a Teoria dos Pontos Críticos,* Notas de aula, Programa de Maestrado.Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, Unidade Acadêmica de Matematica, Marzo de 2018.

[4] Ash, Robert B, *Real Variables with Basic Metric Space Topology,* Volumen 140. Courier Corporation, 2009.

[5] Bencala, Kenneth E., McKnight, Diane M., Zellweger, Gary W., *Characterization of Transport in An Acidic and Metal-r+Rich Mountain Stream Based on A Lithium Tracer Injection and Simulations of Transient Storage,* Water Resources Research, 26(5):989–1000, 1990.

[6] Brezis, Haim, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations,* Springer Science & Business Media, 2010.

[7] Brown, K. J., Zhang, Yanping, *The Nehari Manifold for a Semilinear Elliptic Equation With a Sign-Changing Weight Function,* Journal of Differential Equations, 193(2):481–499, 2003.

[8] Brown, K. J., *The Nehari Manifold for a Semilinear Elliptic Equation Involving a Sublinear Term,* Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 22(4):483–494, 2004.

[9] Chen, Taiyong, Liu, Wenbin, *Solvability of Fractional Boundary Value Problem With p-Laplacian Via Critical Point Theory,* Boundary Value Problems, 2016(1):75, 2016.

[10] Da Luz Vieira, Leandro, *Existência e multiplicidade de soluões para problemas elípticos pelo método da variedade de Nehari*UFMG, (1):79, 2015.

[11] Diethelm, Kai, *The Analysis of Fractional Differential Equations,* Springer Science & Business Media, 2010

[12] Drabek, Pavel, Pohozaev, S. I, *Positive Solutions For The P-Laplacian Application of The Fibering Method Problems,* Proceedings of the Royal Socieety of Edinburgh A: Mathematics, 127:703–726, 1997.

[13] Drabek, Pavel , Alois Kufner, Francesco Nicolosi, *Quasilinear Elliptic Equations with Degenerations and Singularities,* Proceedings-Mathematical Sciences, ISBN 3-11-015490-0(4):545–558, 1997.

[14] Ervin, Vincet. J., Roop, Jhon Paul, *Variational Solution of Fractional Advection Dispersion Equations on Bounded Domains in R^d,* Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal, 23(2):256–281, 2007.

[15] Evans, Lawrence C., *Partial Differential Equations. Second. Vol. 19,* Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[16] Gabriel, Sami, Lau, R. W., Gabriel, Camelia, *The dielectric properties of biological tissues: III. Parametric models for the dielectric spectrum of tissues,* Physics in Medicine & Biology.

[17] Goyal, Sarika, Sreenadh, K., *Nehari manifold for non-local elliptic operator with concave–convex nonlinearities and sign-changing weight functions,*Proceedings-Mathematical Sciences, 125(4):545–558, 2015.

[18] Guía Calderón M., Rosales García J. J., Guzmán Cabrera R., González Parada A., Álvarez Jaime J. A., *El Cálculo Diferencial e Integral Fraccionario y Sus Aplicaciones,* Acta Universitaria Multidisciplinary Scientific Journal, pages 1–9, 2015.

[19] Gutierrez Neri, A. *Condiciones para la existencia de la solución local y soluciones extremales de una ecuación diferencial fraccionaria de orden α no lineal,* Universidad Nacional de Trujillo, 2013

[20] Hartnett, M. and Cawley, A. M., *Mathematical Modelling of The Effects of Marine Aquaculture Developments on Certain Water Quality Parameters,* Water Pollution: Modelling, Measuring and Prediction, pages 279–295. Springer, 1991.

[21] Idczak, D., Walczak, S., *Fractional Sobolev spaces via Riemman-Liouville derivates,* J. Funct. Spaces Appl. 2013, Article ID128043 (2013)

[22] Jiao, Feng, Zhou, Yong, *Existence of Solutions for a Class of Fractional Boundary Value Problems Via Critical Point Theory,* Computers & Mathematics with Applications, 62(3):1181–1199, 2011.

[23] Jin, H., & Liu, W. *Eigenvalue problem for fractional differential operator containing left and right fractional derivatives.* Advances in Difference Equations,(1)246, 2016.

[24] Kai Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type,* Springer Verlag, New York, NY, USA,(2004)2010.

[25] Kavian Otared, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques,* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg NewYork, vol 13, 1 ed.(1993).

[26] Kilbas, Anatolii Aleksandrovich, Srivastava, Hari Mohan, Trujillo, Juan J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations,* Elsevier, Amsterdam, 204, 2006.

[27] Kolmogorov, Andrei Nikolaevich and Fomin, Serguei Vasilievich*Elementos de la Teoria de Funciones y del Analisis Funcional,*Editorial MIR, Moscu, 1972.

[28] Landa Fernández, Marta,*Ecuaciones integrales en el contexto de espacios de Hilbert,* Universidad del Pais Vasco, Trabajo fin de grado en matemáticas

[29] Laskin, Nick, *Fractional Schrödinger Equation,* Physical Review E, 66(5):056108, 2002.

[30] Londoño López, Martha Elena, *Principio Fenomenológico del Comportamiento Dieléctrico de un Hidrogel de Alcohol Polivinílico-Phenomenological Principle Dielectrical Behaviour of Poly (vinyl alcohol) Hidrogel,* Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín,2011.

[31] Matthew Frank Causley, *Asymptotic and Numerical Analysis of Time-Dependent Wave Propagation in Dispersive Dielectric Media That Exhibit Fractional relaxation,* The State University of New Jersey, PhD thesis, 2011

[32] Miguel de Guzmán, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Teoría de Estabilidad y Control*, Primera Edición, Editorial Alhambra S.A., España,1975.

[33] Miller, Kenneth S., Ross, Bertram, *An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations,* John Wiley & Sons, 1993

[34] Mónica Clapp, *Métodos variacionales en ecuaciones diferenciales parciales,* Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México, Mayo 2016

[35] Morais, Fabio Maia de, *Sobre o Teorema do Valor Intermediário,* Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2013.

[36] Navarrina, F., Colominas, I., Casteleiro, M., Cueto-Felgueroso, L., Gómez, H., Fe, J. and Soage, A., *A Numerical Model For High Impact Environmental Areas: Analysis of Hydrodynamic and Transport Phenomena at The Arosa Ria,* Proceedings of the 8th Congress on Moving Boundary Problems, A Coruna, 2005.

[37] Nehari, Zeev ,*On a class of nonlinear second-order differential equations,*Transactions of the American Mathematical Society,JSTOR, vol.95(1), pages(101–123), 1960.

[38] Ozores, Antón Lombardero, *Cálculo Fraccionario y Dinámica Newtoniana,* Pensamiento Matemático, 4(1):77–105, 2014.

[39] Patyn, J., Ledoux, E., Bonne, A., *Geohydrological Research in Relation to Radioactive Waste Disposal in An Argillaceous Formation,* Journal of Hydrology, 109(3-4):267–285, 1989.

[40] Pierantozzi, Teresa, *Estudio de Generalizaciones Fraccionarias de las Ecuaciones Estándar de Difusión y de Ondas,* Universidad Complutense de Madrid, pages 53–72, 2006.

[41] Podlubny, Igor., *Fractional differential equations,* Academic Press, San Diego, 1999..

[42] PROTTER, M. H., *Basic Elements of Real Analysis* Springer Verlag, New York, 1998.

[43] Pu Hai, Cao Lili, *Multiple Solutions for The Fractional Differential Equation With Concave-Convex Nonlinearities and Sign-Changing Weight Functions,* Advances in Difference Equations, (1):174, 2017.

[44] Qiu, Meilan, Mei, Liquan, *Existence of Weak Solutions for Nonlinear Time-Fractional p-Laplace Problems,* Journal of Applied Mathematics,(9), 2014.

[45] Rodríguez, Jesús Pascual Avalos, *Existência e Unicidade das Equações Diferenciais Fracionárias,* Tese ou Dissertação em Universidade Federal de Goiás Instituto de Matemática e Estatística,p(14) 2013

[46] Ross, Bertram, *The Development of Fractional Calculus 1695-1900,* Academic Press, Historia mathematica, 4:75–89, 1977.

[47] Ross, Bertram, *Fractional Calculus and Its Aplications, Lecture Notes in Mathematics,* Springer-Verlag, 457, 1975.

[48] Royden, Halsey Lawrence and Fitzpatrick, Patrick,*Real analysis,*Macmillan New York. Vol(32)-1998.

[49] Sánchez, Raúl, Torres, César, *Existencia de solución débil para un problema no lineal con el operador p-Laplaciano fraccionario,* Selecciones Matemáticas,5(02):154–163, 2018.

[50] Savenije, Hubert H. G., *Salt Intrusion Model For High-Water Slack, Low-Water Slack, and Mean Tide on Spread Sheet,* Journal of Hydrology, 107(1-4):9–18, 1989.

[51] Schiessel, H., Metzler, R., Blumen, A., Nonnenmacher, TF, *Generalized Viscoelastic Models: Their Fractional Equations With Solutions,*Journal of physics A: Mathematical and General, 28(23):6567, 1995.

[52] Tarantello, Gabriella,*On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent,*Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire, Elsevier 9(3):281–304, 1992.

[53] Torres Ledesma, César and Bonilla, Manuel C Montalvo ,*Fractional Sobolev space with Riemann–Liouville fractional derivative and application to a fractional concave–convex problem,*Advances in Operator Theory, Springer, Vol 6(4):1–38, 2021

[54] Torres, César, *Fractional Sobolev space with Riemann- Liouville fractional derivative* Ciclo de conferencias en Matemática y sus Aplicaciones, Escuela Politécnica Nacional, Quito Ecuador, Noviembre 2020.

[55] Torres, César, *Boundary Value Problem With Fractional p-Laplacian Operator,* DE GRUYTER, 0076, 2016.

[56] Torres, César *Existencia y Unicidad de la Solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Orden Fraccionario,* Universidad Nacional de Trujillo, page 59, 2009.

[57] Torres, César, Nyamoradi, Nemat, *Impulsive fractional boundary value problem with p-Laplacian operator,* Journal of Applied Mathematics and Computing 55.1-2: 257-278, 2017.

[58] Torres, César, Nyamoradi, Nemat, *Existence and Multiplicity Result For a Fractional p-Laplacian Equation With Combined Fractional Derivates,* Mathematics Subjet Classification, 2010.

[59] Willem, Michel, *Minimax Theorems,* Springer Science & Business Media, 1997.

[60] Wu, Tsung-Fang, *The Nehari Manifold for a Semilinear Elliptic System Involving Sign-Changing Weight Functions,* Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 68(6):1733–1745, 2008.

[61] Yong, Zhou, *Basic Theory of Fractional Differential Equations,* Volumen 6. World Scientific, Xiangtan University, China, 2014.

[62] Zhao, C. Z., Werner, M., Taylor, S., Chalker, P. R., Jones, A. C., Zhao, Chun, *Dielectric Relaxation of La-doped Zirconia Caused by Annealing Ambient,* Nanoscale Research Letters, 6(1):48, 2011.

[63] Zhou Yong; Wang JinRong and Zhang Lu *Basic theory of fractional differential equations,*World Scientific, Second Edition, Singapore, 2017.

Raúl A. Sánchez Ancajima
Milton Fabián Peñaherrera Larenas
David Elías Dáger López
Janina Hellen Gutierrez Molina
Jhon Ronald Barros Naranjo

9 780311 000463

Recepción: 11-03-2023
Aprobación: 02-06-2023

Cálculo fraccionario. Variedad de Nehari y un problema parabólico no lineal con derivadas fraccionarias

Editorial Tecnocientífica Americana

Domicilio legal: calle 613sw 15th, en Amarillo, Texas. **ZIP**: 79104, EEUU

Teléfono: 7867769991

Fecha de publicación: 22 junio de 2023

La Editorial Tecnocientífica Americana se encuentra indizada en, referenciada en o tiene convenios con, entre otras, las siguientes bases de datos: